Les mathématiques dans le prisme de l'histoire

(par André Joyal)

Ces notes ont été préparées à l'intention des jeunes stagiaires en mathématiques à l'UQAM en juin-juillet 2003.

Il est fascinant de retracer l'histoire des mathématiques jusqu'au l'origine des civilisations. Elle est inséparable de l'histoire du progrès humain en général.

Synopsis:

Histoire des mathématiques sur Internet:

The MacTutor History of Mathematics archive: `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/`

§ 0 Préhistoire

L'histoire ne représente qu'une infime fraction de la préhistoire. De la préhistoire humaine nous savons peu de choses sinon ce que l'on peut deviner par l'examen des sites archéologiques. Des recherches récentes basées sur l'analyse de l'ADN des populations actuelles ont toutefois données des résultats nouveaux. L'humanité actuelle serait constitué d'une seule espèce, l'*Homo sapiens sapiens*. Cette espèce aurait atteint sa maturité sur le continent Africain il y a environ 150,000 ans, pour se répandre ensuite sur le continent Asiatique et la péninsule Européenne. Le continent Américain aurait été envahit par migration successive à partir de 40,000 ans, et le continent Australien par une seule migration vers la même époque.

L'humanité a colonisé la terre entière (sauf l'Antartique) au temps de la préhistoire. Ce qui prouve que l'homme possède une capacité d'adaptation exceptionelle qui le distingue des autres espèces animales. C'est est un animal social doué de parole. Il possède un esprit inventif qui lui permet de s'adapter à toute sorte d'environnement hostile (comme l'hiver Canadien!). La maîtrise du feu, la fabrication d'outils de pierre taillée, la domestication du chien et le tir à l'arc sont ses première conquètes technologiques. Elles sont suivies de l'invention de l'élevage, de l'agriculture, du tissage, de la fabrication de la poterie et de la céramique.

Un des problèmes fondamentaux de l'agriculture est celui de la régénération des sols cultivés. Car il suffit de quelques années de culture pour épuiser un sol. Pour le regénérer il faut le laisser en jachère durant une dizaines d'années. Il suffit ensuite de couper les pousses d'arbres pour les bruler car la cendre est un excellent fertilisant. Avec cette méthode un agriculteur possédant dix lots peut en cultiver un chaque année. On peut accélérer le processus en engraissant les terres avec les excréments du bétail au lieu d'attendre une dizaine d'années, mais cette technique ne fut découverte que progressivement.

Dans certaines plaines fluviales l'épuisement des sols par les cultures peut être compensé par le fleuve qui dépose du limon. C'est le cas par exemple des plaines du Nil, du Tigre et de l'Euphrate. La construction de digues et de canaux pour l'irrigation des terres favorise l'organisation du travail collectif et l'établissement d'une administration pour veiller à la répartition des tâches. Il faut construire des batiments pour entreposer les fruits du travail collectif. Il faut développer une écriture pour enregistrer la contribution de chacun en vue d'une rétribution future. Il faut développer un système de lois et une religion commune. Tout cela favorise le développement d'une classes d'administrateurs et de prêtres qui tirent leur subsistance d'une taxe imposée aux autres travailleurs.

Les premières grandes civilisations doivent leur existence aux travaux collectifs que nécessitait un certain type d'agriculture. C'est le cas de la Mésopotamie avec le Tigre et l'Euphrate, de l'Égypte avec le Nil, de l'Inde avec l'Indus et le Gange, et aussi de la Chine avec le fleuve Bleu et le le fleuve Jaune. La division des terres, la répartition des héritages, la constitution des calendriers, la construction des bâtiments, les échanges commerciaux ou la simple curiosité suscitèrent des problèmes d'ordre mathématique; leurs solutions ont été transmises d'une génération à l'autre sous forme de recettes ou de règles de l'art. Il n'y a pas de civilisations sans mathématiques.

§ 1 Mésopotamie

La Mésopotamie est une région d'Asie antérieure comprenant les vallées du Tigre et l'Euphrate. Ces fleuves se rejoignent dans une région marécageuse avant de se jeter dans le golfe Persique. La maîtrise de ce marécage par la construction de digues fut l'oeuvre collective des sumériens vers ∼5000. La région se divisa naturellement en cité-états indépendantes jusqu'à leur extension maximale vers ∼2500. Les cités commencèrent alors à se livrer à des guerres féroces pour le contrôle des territoires et des canaux d'irrigation. Le roi Lougalzaggi conquit l'ensemble des cités vers ∼2350. Mais l'empire qu'il avait forgé fut arraché par Sargon, un officier qui parlait l'akkadien. On croit que les Akkadiens, les Cananénens, les Amorites, les Hébreux et les Chaldéens sont venus d'Arabie car ils parlent des langues similaires dites sémites. La langue akkadienne s'imposa dans l'empire qui devint progressivement bilingue avec le sumérien comme langue seconde. Quoique peuplée de Sémites, Babylone se révolta contre la dynastie d'Akkad. À partir de ∼1830 elle fut gouvernée par celle des Amorites. Elle atteignit son apogé vers ∼1730 sous le reigne du roi Hammurabi qui imposa sa domination à l'Assyrie et à l'ensemble du pays de Sumer. Elle fut pilée en ∼1530 par un peuple parlant une langue indo-européenne, les Hittites. Elle retrouva son indépendance sous Nabuchodonosor en ∼1137. Elle tomba sous la domination des Assyriens vers ∼800. L'empire néo-babylonien fondé par Nabopolosar se libéra de l'Assyrie avec l'aide des Mèdes en ∼625. Babylone retrouva alors sa splendeur d'antant avec des jardins suspendus considérés par les Anciens comme l'une des Sept Merveilles du monde.

En ∼587 Nabopolosar conquit la Syrie, la Palestine et Jérusalem. Il amena des juifs en captivité à Babylone. L'empire de Babylone déclina après sa conquète par le roi perse Cyrus II en ∼539. Celui-ci permit aux juifs de retourner à Jérusalem. Le roi perse Darius et surtout Xerxès en ∼482 précipitèrent le déclin de la ville en réprimant des révoltes. La Perse fut conquie par Alexandre le Grand en ∼332. Celui-ci fit de Babylone la capitale de son empire mais il mourut en ∼331.

L'histoire de Babylone nous est connue par l'historien Grec Hérodote. Mais aussi par des centaines de milliers de tablettes d'argiles d'écriture cunéiforme.

Les babyloniens du temps du roi Hammurabi savaient résoudre de nombreux problèmes algébriques dont certains comportent une équation du second degré. Par exemple, une tablette d'écriture cunéiforme discute du problème suivant:

La somme de l'aire de deux carrés est égale à 1000. Le coté de l'un est de $2/3$ *celui de l'autre, diminué de 10. Que valent les cotés des carrés ?*

Si on traduit le problème en notation algébrique moderne on obtient deux équations à deux inconnues: $x^2 + y^2 = 1000$ et $y = (2/3)x - 10$. La solution s'obtient en résolvant l'équation du second degré:

$$\frac{13}{9}x^2 = \frac{40}{3}x + 900.$$

On trouve $x = 30$ et $y = 10$. L'algèbre babylonienne est réthorique. Les problèmes et leurs solutions sont exprimés avec des mots du langage courant. Les tablettes contiennent des solutions à des problèmes particuliers mais laissent deviner une méthode générale. La formule

$$x = \sqrt{(p/2)^2 + q} - p/2$$

qui permet de résoudre l'équation $x^2 + px = q$ est exprimée sous forme de recette. Une tablette indique que les babyloniens savaient additionner la série géométrique

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9 = 2^{10} - 1$$

et qu'ils savaient calculer la somme des carrés

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = \frac{10 \cdot (1 + 10) \cdot (1 + 2 \cdot 10)}{2 \cdot 3} = 385.$$

Ils savaient obtenir des approximations de plus en plus précises d'une racine carrée $x = \sqrt{b}$ en prenant successivement

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{b}{x_n}\right)$$

à partir d'une première approximation x_1. Sur une tablette on trouve que

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,41423...$$

Les mathématiques babyloniennes ne se limitent pas à l'arithmétique et à l'algèbre. Les babyloniens savaient qu'un angle inscrit dans un demi-cercle est rectangle. Ils connaissaient le théorème de Pythagore car une tablette contient un grand nombre de solutions entières de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$.

§ 2 La civilisation Égyptienne

"*L'Egypte est un don du Nil*" d'après l'historien Grec Hérodote. Le Nil est le plus long fleuve du monde (6671 km). Prenant sa source au nord du lac Tanganyika son bassin couvre le Tanganyika, le Kenya, le Ruanda, le Burundi, le Congo, le Sudan, l'Éthiopie et l'Egypte. Il franchit le désert de Nubie et de la Haute Égypte par une succession de six cataractes. Les crues du Nil sont gonflés par les pluies tropicales de juin en Afrique. En Égypte le niveau maximal des crues est atteint en septembre. Les eaux limoneuses qui inondent la vallé du Nil viennent fertiliser son sol. La régulation du cours du Nil en aval de la première cataracte a permis aux Égyptiens de transformer ce qui était un marécage improductif en champs fertiles et en pâtures. Vers ∼3100 Ménes unifia l'Égypte et fonda la *première dynastie* avec This pour capitale. C'est le début du *Premier Empire* (de ∼3100 à ∼2181). La fertilité de l'agriculture irrigée libéra une partie du peuple de l'obligation de consacrer tous son temps aux travaux des champs, du moins pour une partie de l'année. Ce qui donna aux pharaons les moyens de satisfaire un désir essentiel, s'assurer de la vie éternelle. Matérialistes, les Égyptiens aimaient jouir des biens de ce monde. Ils envisageaient la vie après la mort comme la jouissance sans fin de ces biens. Ils croyaient que le Pharaon avait le pouvoir de devenir un dieu. Une autre croyance voulait qu'Osiris, l'esprit de la végétation qui renait, rendrait ses adorateurs capable d'accomplir la même chose. La plus ancienne pyramide de pierre fut construite par Imhotep, architecte et ministre du pharaon Djeser (de ∼2668 à ∼2647). Son oeuvre expérimentale eut tant de succès qu'il fut divisiné. Les trois grandes pyramides de Gizeh furent construites peu de temps après, dans un intervalle d'environ un siècle. L'absolutisme pharanoique atteignit son apogée avec la quatrième dynastie, celle du pharaon Cheops. La capitale fut déplacée à Memphis, une ville nouvelle proche du Delta. La cinquième dynastie éleva le dieu soleil Rê au dessus des autres dieux égyptiens. Dès lors, le pharaon se présenta comme le fils de Rê, conçu par sa mère humaine et l'action non physique de Rê. La sixième dynastie marqua la chute du premier empire. Pepi II, le dernier pharaon de cette dynastie, occupa le trône durant quatre-vingt quatorze ans (de ∼2278 à ∼2184). À cette époque, les fonctionnaires locaux, dont la nomination était révocable, se transformèrent *de facto* en princes locaux dont la charge était hériditaire. Ils prirent le contrôle du commandement des contingents militaires égyptiens. Un autre problème provenait de l'expansion d'une armée de prêtres chargés des rites dont dépendait, croyait-on, l'immortatilité des pharaons. Vers cette époque l'Égypte connut de grands bouleversements. L'administration s'effondra et le chaos s'installa pour plus d'un siècle. Les causes exactes sont inconnues. Il s'agit peut-être de la plus ancienne révolution sociale. Mais d'après des recherches récentes en climatologie il semble que la terre aurait traversé une mini période glaciaire vers cette époque. Peut-être suite à l'explosions de volcans. Le bouversement aurait causé une sécheresse d'environ un siècle en Égypte. À la fin de cette période vers ∼ 2040, un Thébain portant le nom de Mentouhotep II réunifia l'Égypte. Il créa le *Second Empire* qui dura trois siècles. Les pharaons du second empire obligèrent les princes locaux à se soumettre, ce qui fut long et difficile. Au second empire succéda une péoriode obscure de l'histoire égyptienne, celle de l'invasion des Hiksos. Elle atteignit son maximum par l'occupation de Memphis par les Hiksos en ∼1670. Ce qui divisa l'Égypte en royaume du Nord et royaume du Sud. Les Hiksos assimilèrent promptement la civilisation supérieure de leur sujets égyptiens. Ils furent chassés vers ∼1567 par Ahmes un Thébain. C'est le début du *Nouvel Empire*(∼1575 à ∼1087). Désireux de protéger l'Égypte contre les invasions, le successeur d'Ahmes, le pharaon Thoutmes I, occupa la Palestine et la Syrie. Il étendit les frontières de l'Égypte en aval de la quatrième cataracte du Nil. L'empire fut toutefois désorganisé par le pharaon Aménophis IV qui prit le nom d'Akhénaton. Ce pharaon révolutionaire tenta d'abolir le culte de tous les dieux égyptions pour lui substituer une religion monothéiste dont le dieu serait représenté par le disque solaire Aton. Pour échapper à la classe sacerdotale, il abandonna Thèbe pour fonder une nouvelle capitale Akhet-Aton. Ce curieux pharaon pronait l'émancipation des individus et proclamait l'abandon du passé au profit d'une nouvelle liberté. Il soutenait un art naturaliste par des portraits ressemblants mais peu flatteur de sa propre personne. Il s'attacha à écrire dans la langue vivante de son époque. À la mort d'Akhénaton, son gendre Toutânkhaton lui succéda très jeune. Il prit le nom de Toutânkhamon et abolit le culte d'Aton. Il rétablit la religion officielle de l'empire avant de mourir à vingt ans. Horemheb, chef des armées de Toutânkhamon, usurpa le trône avec l'aide des prêtres d'Amon. Il reconquit la Palestine et restaura l'ordre ébranlé par les réformes d'Akhénaton.

Les anciens Égyptiens (∼ 1500 ans avant JC) savaient multiplier deux nombres entiers en doublant successivement l'un des facteurs et en exprimant l'autre comme somme de puissance de 2. Par exemple, pour calculer 13×15 on peut doubler successivement 15:

$$\begin{array}{cccc} 15 & 30 & 60 & 120 \\ 1^* & 2 & 4^* & 8^* \end{array}$$

la deuxième ligne servant de "marqueur". Comme on a $13 = 1 + 4 + 8$ il en résulte que

$$13 \times 15 = (1 + 4 + 8) \times 15 = 15 + 60 + 120 = 195.$$

Les égyptiens savaient calculer la somme des termes d'une progression arithmétique et d'une progression géométrique. Ils savaient que le volume d'une pyramide est le produit de l'aire de la base par le tiers de la hauteur. Pour calculer l'aire d'un cercle de diamètre d ils utilisaient la formule

$$A = (d - d/9)^2 = \frac{64}{81}d^2,$$

ce qui revient à prendre $256/81 = 3.1605$ pour valeur de π.

§ **3 La civilisation Indienne**

Le livre indien *Sulbasutras* (700 ans avant JC) contient le théorème de Pythagore. On y trouve que

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 3\cdot 4} \qquad (= 1.4142156)$$

Les indiens utilisaient un système de numération décimale 300 ans avant JC mais avec un symbole particulier pour chacun des nombres

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; 10, 20, \cdots, 90; 100, 200, \cdots, 900; 1000, 2000, \cdots, 9000.$$

La système décimal moderne avec le zéro est d'origine indienne; il apparait vers le 3$^{\text{e}}$ siècle après JC. Au 7$^{\text{e}}$ siècle, le mathématicien Aryabhata donne comme valeur de π

$$\pi = \frac{62\,832}{20\,000} = 3,1416.$$

§ **4 La civilisation Chinoise** (incomplet!)

Les anciens chinoix (250 ans avant JC) connaissaient le théorème de Pythagore. Le *Li-Ching* (le Livre des Changements) publié vers 200 ans avant JC contient le carré magique

$$\begin{matrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{matrix}.$$

Les sections du livre sont numérotées selon un système binaire. La collection *Chiu Chang Suan Shu* (9 chapitres sur l'art mathématiques) composée durant la dynastie des Han (de 206 avant JC à 221 après JC) donne les règles d'addition et de multiplication des fractions:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Il contient l'algorithme d'Euclide permettant de réduire une fraction à son plus bas dénominateur.

§ **5 La civilisation Grecque** (incomplet!)

La civilisation grecque antique doit son développement à l'expansion de l'économie maritime en Méditerranée vers le 10^{e} siècle avant JC. La Grèce comprend un archipel situé en mer d'Égée et ses habitants ont maitrisé l'art de la navigation. Au 10^{e} siècles avant JC, le port de Milet constitue déjà une importante voie de commerce entre l'Empire assyrien et la mer d'Égée. L'expansion du commerce permet l'ouverture de comptoirs dans toute la Méditerranée. Le mouvement donne naissance à des villes grecques en Sicile, en Italie, en France et en Afrique du nord. Au 6^{e} siècles avant JC le littoral de la Méditerranée et de la Mer Noire est parsemé d'une centaine de villes grecques Ces villes sont parfois alliées, parfois en guerre. Des régimes politiques variés s'y succèdent: monarchie, aristocratie, oligarchie, tyrannie, démocratie. Athènes sera démocratique durant près de 250 ans, alors que Sparte sa rivale sera organisée comme un état totalitaire. Mais la société athénienne est inégalitaire malgré la démocratie: la moitié de ses habitants sont des exclaves ou des métèques; tout comme les femmes, ils sont privés de droits politiques.

Le roi Philippe II de Macédoine conquiert l'ensemble de la Grèce en 338 avant JC. Il s'affirme comme champion de l'hellénisme contre l'empire Perse. Il meurt poignardé en 336 avant JC, probablement à l'instigation de son épouse Olympia. Son fils Alexandre (le Grand) lui succède et part à la conquète de l'Orient. Après la conquète des villes syriennes il pénètre en Égypte alors sous domination Perse. Il est accueillit en libérateur. Il se fait reconnaitre comme fils du dieu Amon et sacrer roi d'Égypte. Il fonde la ville d'Alexandrie. Il part ensuite à la conquète de la Perse. En cinq années il conquiert un territoire qui va de la Perse à l'Indus. Mais ses hommes refusent de le suivre plus loin. Il est foudroyé par une maladie inconnue (peut-être le virus du Nil) en regagnant Babylone deux ans plus tard. Son empire sera partagé entre ses généraux qui ne tardèrent pas à se combattre. Les Ptolémées gouverneront l'Égypte durant plusieurs siècles.

Alexandre répandit les principes démocratiques des cités grecques dans toutes les villes neuves de son empire. Il pratiqua une politique de tolérance religieuse et de respect des institutions locales. Il chercha à remplacer les sentiments nationaux par un cosmopolitisme culturel. Il favorisa le mélange des races et répandit le grec comme langue de commerce international.

La créativité des grecs de l'antiquité est extraordinaire. Elle se manifeste en philosophie, en politique, en sciences, en histoire, en littérature, en théatre et en architecture. On peut en chercher l'explication dans les accidents de l'histoire, de la géographie et de la sociologie. L'expansion des cités grecques entre 1000 et 400 avant JC fut commerciale avant d'être militaire. Elle met les grecs en contact avec toute les civilisations du bassin Méditerranéen et de la mer Noire. Face à la multiplicité des croyances locales ils cherchèrent à développer une compréhension universelle basé sur la raison. Ils inventèrent la démocratie qui favorise le développement d'une *attitude critique*. On peut se faire une idée de l'esprit qui régnait durant cette période en relisant les *Dialogues* de Platon. D'après Protagoras, *l'homme est la mesure de toutes choses*. Platon dit au contraire qu'il faut chercher la vérité au delà des apparences sensibles. Il donne comme exemple les mathématiques où la vérité n'est pas seulement une affaire d'opinion. Il avance l'idée que c'est la morale et pas seulement la raison qui devrait guider notre vie. Il soutient *Dieu qui est pour nous la mesure de toutes choses*. Ce débat est encore bien vivant aujourd'hui.

Une des contributions les plus remarquable de la civilisation grecque est sans doute l'introduction de l'idée de preuve en mathématiques. Une preuve est essentiellement un argumentaire permettant de convaincre autrui sur une base rationnelle plutôt qu'autoritaire. Il parait possible de découvrir des choses sur le monde en observant d'abord ce qui parait évident et en utilisant ensuite le raisonnement. La rigueur logique de la géométrie grecque restera inégalée durant près de 2000 ans. Elle sera prise comme modèle d'une rigueur à atteindre dans plusieurs domaines de la connaissance. Dans son *Ethique*, Spinoza (1634-1672) tentera d'édifier la morale sur une base logique.

Travaux des principaux mathématiciens grecs

- Thales de Milet (vers 600 avant JC) : Les premiers théorèmes de géométrie. Introduit l'idée de preuve.

- Pythagore (de 572 à 501 avant JC): Étude des nombres entiers. Le théorème qui porte son nom. Découverte des polyhèdres réguliers.

- Platon (de 529 à 388 avant JC): Étude des polyhèdres réguliers.

- Eudoxe (de 408 à 355 avant JC): Théorie des proportions.

• Euclide (de 315 à 255 avant JC): *Éléments* de géométrie.

• Apollonius d'Alexandrie (vers 264 avant JC) : Théorie des sections coniques.

• Archimède (de 287 à 212 avant JC): Invente la mécanique de léquilibre et l'hydrostatique. Précurseur du calcul différentiel et intégral. Calcule le volume et l'aire d'une sphère.

• Ératosthène (de 270 à 194 avant JC): Invente le crible qui porte son nom. Mesure le globe terrestre.

• Ptolémé d'Alexandrie (vers 75 après JC): *Almageste*, un traité d'astronomie en 13 volumes. Développe la trigonométrie.

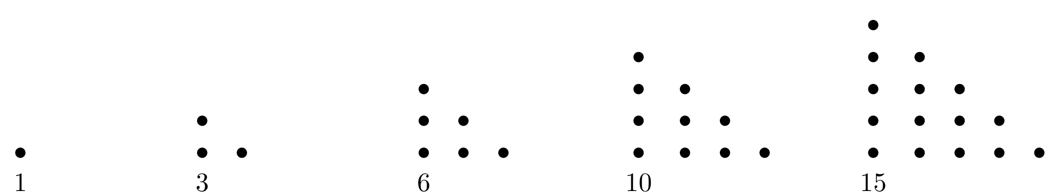
• Diophante d'Alexandrie (vers 150 après JC) : *Arithmétique*, un traité portant sur des problèmes d'algèbre.

Thales de Milet (vers 600 avant JC). Il voyagea en Orient et en Égypte durant sa jeunesse. Il fut commerçant. On raconte qu'il fit fortune en spéculant sur les variations saisonnières du prix de l'huile d'olive. Il devint plus tard homme d'état, mathématicien et astronome. On le considère comme le premier mathématicien grec. On lui attribue l'idée de preuve. On lui doit les premiers théorèmes de géométrie. Il fonda une école de mathématique. L'historien grec Hérodote raconte que Thales prédisit une éclipse de soleil (probablement celle du 28 mai 585 avant JC).

Pythagore Pythagore (de 572 à 501 avant JC) est né sur l'ile de Samos en mer dÉgée. L'île est située à proximité des côtes de l'Asie Mineure (Turquie). Durant sa jeunesse Pythagore voyagea en Orient pour y rencontrer sages, savants et chefs religieux. C'était l'époque des enseignements de Zoroastre en Perse, de Bouddha aux Indes, de Confucius et de Lao-Tzu en Chine (mais on ne pense pas que Pythagore ait rencontré ces personnages). Au terme de ses voyages Pythagore s'établit à Crotone, ville grecque d'Italie, pour y fonder une secte religieuse et philosophique. Sur le plan mystique les Pythagoriciens croyaient en l'immortalité de l'âme humaine et en la possibilité de la réincarnation. Sur le plan philosophique leur doctrine peut se résumer à ceci: *la compréhension ultime des choses se trouve dans les nombres entiers.* Les Pythagoriciens attribuent une valeur mystique à certains nombres et les classent selon leurs propriétés arithmétiques ou géométriques. Ils disent qu'un entier est *parfait* s'il est égal à la somme de ses diviseurs propres. Par exemple, les nombres 6 et 28 sont parfaits car $6 = 3 + 2 + 1$ et $28 = 14 + 7 + 4 + 2 + 1$. Ils disent aussi que deux entiers sont *amicaux* si chacun est la somme des diviseurs propres de l'autre. Par exemple, 220 et 284 sont amicaux car on a

$$220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$$
$$284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110.$$

Ils introduisent les nombres *triangulaires, carrés, pentagonaux, hexagonaux.* Par exemple, les nombres triangulaires sont $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$



Les pythagoriciens utilisent ces représentations pour obtenir diverses relations. Par exemple, la figure suivante illustre le fait que le n-iène nombre triangulaire $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ vaut

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \begin{array}{cccccc} \bullet & * & * & * & * & * \\ \bullet & \bullet & * & * & * & * \\ \bullet & \bullet & \bullet & * & * & * \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & * & * \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & * \end{array}$$

Les nombres carrés sont $1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\
 & & & \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet & \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\
 & & \bullet\ \bullet\ \bullet & \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet & \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\
 & \bullet\ \bullet & \bullet\ \bullet\ \bullet & \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet & \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\
\bullet & \bullet\ \bullet & \bullet\ \bullet\ \bullet & \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet & \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\
1 & 4 & 9 & 16 & 25
\end{array}.$$

La figure suivante illustre le fait que la somme de deux nombres triangulaires successifs est un carré:

$$10 + 15 = 5^2 \qquad \begin{array}{ccccc}
\bullet & \ast & \ast & \ast & \ast \\
\bullet & \bullet & \ast & \ast & \ast \\
\bullet & \bullet & \bullet & \ast & \ast \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \ast \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}$$

La figure suivant illustre le fait que la somme des n-premiers nombres impairs est un carré:

$$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 \qquad \begin{array}{cccc}
\star & \star & \star & \star \\
\diamond & \diamond & \diamond & \star \\
\bullet & \bullet & \diamond & \star \\
\circ & \bullet & \diamond & \star
\end{array} \qquad .$$

On attribue à Pythagore la découverte que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationel. En réalité, les grecs ne disposaient pas du concept moderne de nombres réels, rationnels ou irrationnels. Ils avaient seulement un concept de *rapport* entre des quantités de même nature. Deux quantités sont dites *commensurables* (co-mesurables) si elles peuvent s'exprimer comme des multiples entiers d'une même quantité; sinon elles sont dites *incommensurables*. Pythagore découvre que la diagonale d'un carré et son côté sont incommensurables.

Pythagore est l'auteur d'une théorie mathématique de l'harmonie musicale encore acceptée de nos jours. Pythagore mesurait la hauteur du son émi par une corde vibrante par la longeur de cette corde. Aujourd'hui, on sait qu'un son est causé par les vibrations de l'air frappant le tympan de l'oreille. On mesure la hauteur du son par sa fréquence, c'est à dire par le nombre de battements par seconde. Nous décrirons la théorie de Pythagore en utilisant la notion de fréquence (la fréquence d'une corde vibrante est inversement proportionnelle à sa longuer). En expérimentant sur des instruments comme la harpe, la lyre et la cithare, Pythagore découvre que les sons de fréquences f, $2f$, $4f$, $8f$, $\ldots$ etc sont *semblables* bien que de hauteur différente. L'*octave* est l'intervalle musical séparant une fréquence f de son double $2f$. Par exemple, si f est un *ré* alors $2f$ est un *ré* situé dans l'octave suivant. Pythagore découvre aussi qu'il faut mesurer l'intervalle musical séparant deux fréquences f et g par le *rapport* g/f (et non pas par la différence $g - f$ comme on pourrait le penser). Autrement dit, d'après Pythagore deux intervalles musicaux $[f, g]$ et $[u, v]$ sont *équivalents* ssi $\frac{g}{f} = \frac{v}{u}$. Pythagore choisit de subdiviser l'octave $[f, 2f]$ en 12 intervalles musicaux égaux. Le choix de 12 n'est pas arbitraire car ce nombre possède un grand nombre de diviseurs. Pour subdiviser l'octave $[f, 2f]$ en deux intervalles égaux il faut trouver une fréquence intermédiaire $f < g < 2f$ pour laquelle

$$\frac{g}{f} = \frac{2f}{g}.$$

Ce qui donne $g = f\sqrt{2}$. Pour subdiviser l'octave $[f, 2f]$ en 12 intervalles égaux il faut trouver des fréquence intermédiaires

$$f - f_0 < f_1 < f_2 < f_3 < f_4 < f_5 < f_6 < f_7 < f_8 < f_9 < f_{10} < f_{11} < f_{12} = 2f$$

de sorte que les rapports

$$\frac{f_1}{f_0}=\frac{f_2}{f_1}=\frac{f_3}{f_2}=\frac{f_4}{f_3}=\frac{f_5}{f_4}=\frac{f_6}{f_5}=\frac{f_7}{f_6}=\frac{f_8}{f_7}=\frac{f_8}{f_7}=\frac{f_9}{f_8}=\frac{f_{10}}{f_9}=\frac{f_{11}}{f_{10}}=\frac{f_{12}}{f_{11}}$$

soient égaux. Si r est ce rapport commun alors on a

$$r^{12}=\frac{f_1}{f_0}\cdot\frac{f_2}{f_1}\cdot\frac{f_3}{f_2}\cdot\frac{f_4}{f_3}\cdot\frac{f_5}{f_4}\cdot\frac{f_6}{f_5}\cdot\frac{f_7}{f_6}\cdot\frac{f_8}{f_7}\cdot\frac{f_8}{f_7}\cdot\frac{f_9}{f_8}\cdot\frac{f_{10}}{f_9}\cdot\frac{f_{11}}{f_{10}}\cdot\frac{f_{12}}{f_{11}}=\frac{f_{12}}{f_0}=\frac{2f}{f}=2$$

Par suite, $r=2^{\frac{1}{12}}$. On obtient que $f_i=fr^i$. Les musiciens disent que l'intervalle qui sépare f_i et f_{i+1} est un *demi-ton.* Les fréquences f_i pour $0\leq i\leq 12$ forment une *gamme chromatique.* Si f_0 est un *do* la gamme chromatique est constituée des notes suiventes:

do, do$^\sharp$, ré, ré$^\sharp$, mi, fa, fa$^\sharp$, sol, sol$^\sharp$, la, la$^\sharp$, si, do.

Une troisième découverte de Pythagore concerne les *harmoniques* d'un son donné. Il découvre qu'un son de fréquence f vibre en accord avec les sons de fréquences $2f, 3f, 4f, 5f, \ldots$. Les musiciens d'aujourd'hui disent que $3f$ est la *quinte* de f (mais c'est mal nommé). La fréquence $3f$ est située dans l'octave $[2f, 4f]$. Comme $2^{\frac{7}{12}}\times 2=2.99661\simeq 3$, la quinte est identifiée à la septième note qui suit $2f$ dans l'octave $[2f, 4f]$, et même à la septième note qui suit f dans l'octave $[f, 2f]$. La quinte d'un *do* est un *sol* et la quinte d'un *mi* est un *si.*

Euclide (360-300 avant JC) était citoyen d'Alexandrie (ville grecque d'Egypte). On connait peu de chose de sa vie sinon qu'il aurait écrit ses *Éléments* vers l'âge de quarante ans. Ils sont divisés en 13 volumes.

Livre I : Constructions élémentaires, théorie de la congruence, aire des polygones, théorème de Pythagore.
Livre II: *Algèbre géométrique.*
Livre III: Géométrie du cercle.
Livre IV: Construction de certains polygones réguliers.
Livre V: *Théorie des proportions.*
Livre VI: Figures semblables.
Livre VII-IX: *Théorie des nombres.*
Livre X:*Rapports incommensurables.*
Livre XI: Géométrie dans l'espace. Volumes simples.
Livre XII: Surfaces et volumes obtenues par la méthode d'"exhaustion" d'Eudoxe.
Livre XIII: Construction des cinqs polyhèdres réguliers.

C'est le premier exemple d'une théorie axiomatique. Certains volumes portent sur des questions d'algèbre et de théorie des nombres. On y trouve l'algorithme d'Euclide permettant de calculer le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers. On y trouve aussi la preuve de l'existence d'une infinité de nombres premiers. À cause de leur importance nous allons commenter brièvement quelques uns des livres.

Le livre I commence avec une liste de 23 "définitions" suivies de 5 "postulats" et de 5 "notions communes". Le théorème de Pythagore se trouve à la proposition 47.

Le livre II porte sur l'*algèbre géométrique.* Les identités suivantes y sont démontrées géométriquement:

1. $a(b+c+d+\cdots)=ab+ac+ad+\cdots$
2. $(a+b)a+(a+b)b=(a+b)^2$
3. $(a+b)a=ab+a^2$
4. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
5. $(a+b)(a-b)+b^2=a^2$
6. $(2a+b)b+a^2=(a+b)^2$
7. $a^2+b^2=2ab+(a-b)^2$
8. $4ab+(a-b)^2=(a+b)^2$
9. $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

Le livre V porte sur les grandeurs et des proportions. Par exemples, la proposition 16 dit que si $a : b = c : d$ alors $a : c = b : d$; la proposition 18 dit que si $a : b = c : d$ alors $a + b : b = c + d : d$. Les livres VII-IX portent sur l'arithmétique; on trouve l'algorithme d'Euclide pour calculer le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers à la proposition 2 du livre VII; Euclide démontre qu'il existe une infinité de nombres premiers à la proposition 20 du livre IX. La proposition 30 porte sur les nombres parfaits. Euclide montre que le nombre $(2^p - 1)2^{p-1}$ est parfait si le nombre $2^p - 1$ est premier. On ne sait toujours pas s'il existe d'autres nombres parfaits que ceux trouvés par Euclide. Le livre X porte sur les quantités incommensurables. Les identités suivantes sont démontrées géométriquement

$$\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}1}{a - b}$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

La proposition 9 affirme en substance que si l'entier n n'est pas un carré alors $\sqrt{n}$ est un nombre irrationnel. Il obtient en particulier que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Ces résultats sont toutefois formulés en termes de rapports incommensurables.

Eratosthène aurait vécu à Alexandrie peu de temps après Euclide. On lui doit l'idée du *crible d'Eratosthène*. C'est une méthode permettant d'obtenir tous les nombres premiers inférieurs à un entier donné N. En partant d'une liste des entiers de 2 à N elle consiste à éliminer successivement de cette liste les multiples de 2, de 3, de 5, etc. Par exemple, supposons que $N = 100$. Si on élimine les multiples de 2 (sauf 2) il reste

$$\begin{array}{c}
2^* \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad 13 \quad 15 \quad 17 \quad 19 \quad 21 \quad 23 \quad 25 \quad 27 \quad 29 \quad 31 \quad 33 \\
35 \quad 37 \quad 39 \quad 41 \quad 43 \quad 45 \quad 47 \quad 49 \quad 51 \quad 53 \quad 55 \quad 57 \quad 59 \quad 61 \quad 63 \quad 65 \quad 67 \\
69 \quad 71 \quad 73 \quad 75 \quad 77 \quad 79 \quad 81 \quad 83 \quad 85 \quad 87 \quad 89 \quad 91 \quad 93 \quad 95 \quad 97 \quad 99
\end{array}.$$

Si on élimine ensuite les multiples de 3 (sauf 3) il reste:

$$\begin{array}{c}
2 \quad 3^* \quad 5 \quad 7 \quad 11 \quad 13 \quad 17 \quad 19 \quad 23 \quad 25 \quad 29 \quad 31 \\
35 \quad 37 \quad 41 \quad 43 \quad 47 \quad 49 \quad 53 \quad 55 \quad 59 \quad 61 \quad 65 \quad 67 \\
71 \quad 73 \quad 77 \quad 79 \quad 83 \quad 85 \quad 89 \quad 91 \quad 95 \quad 97
\end{array}.$$

Si on élimine ensuite les multiples de 5 (sauf 5) il reste:

$$\begin{array}{c}
2 \quad 3 \quad 5^* \quad 7 \quad 11 \quad 13 \quad 17 \quad 19 \quad 23 \quad 29 \quad 31 \\
37 \quad 41 \quad 43 \quad 47 \quad 49 \quad 53 \quad 59 \quad 61 \quad 67 \\
71 \quad 73 \quad 77 \quad 79 \quad 83 \quad 89 \quad 91 \quad 97
\end{array}.$$

Si on élimine ensuite les multiples de 7 (sauf 7) il reste:

$$\begin{array}{c}
2 \quad 3 \quad 5 \quad 7^* \quad 11 \quad 13 \quad 17 \quad 19 \quad 23 \quad 29 \quad 31 \\
37 \quad 41 \quad 43 \quad 47 \quad 53 \quad 59 \quad 61 \quad 67 \\
71 \quad 73 \quad 79 \quad 83 \quad 89 \quad 97
\end{array}.$$

À ce stade remarquons que le premier multiple d'un nombre p à se faire éliminer est toujours p^2. Nous avons terminé le criblage des entiers de 1 à 100 puisque $11^2 > 100$. Il ne reste alors que les nombres premiers.

Eratosthène est célèbre pour avoir été le premier à mesurer la dimension du globe terrestre. Voici comment. Il avait appris qu'un certain jour de l'année le soleil du midi était situé exactement au zénith dans la ville de Syene. Cette ville est située sur le Nil au sud. Il observa que le même jour à Alexandrie le soleil du midi était situé à $7^o12'$ au sud du zénith. Alexandrie est située près de l'embouchure du Nil sur le bord de la Méditerranée. Eratosthène en déduisit qu'Alexandrie était située à une latitude de $7^o12'$ au nord de Syene. La distance entre à Syene et Alexandrie était connue pour être de 5000 stades. Comme $7^o12' = 360^o/50$ Eratosthène en déduisit que la circonférence de la terre est de 50×5000 stades $= 250,000$ stades. Cela équivaut à 39,688 kilomètres (la valeur réelle est de 40,000 kilomètres). Signalons le système héliocentrique fut proposé par Aristarque de Samos vers la même époque (310-230 avant JC). Le système fut malheureusement rejeté par le grand astronome grec Ptolémée (140-160 après JC). Eratosthène professa que l'on pourrait atteindre l'Inde en partant d'Espagne vers l'Ouest.

Archimède (287-212 avant JC) vécu surtout à Syracuse, ville grecque de Sicile. Il était contemporain et ami d'Erathostène. On le considère comme le plus grand mathématicien de l'antiquité. Il anticipa le calcul différentiel et intégral. Dans son ouvrage sur la *Mesure du cercle* il montre que l'on a

$$3\frac{10}{71} < \pi < 33\frac{1}{7}.$$

Sa méthode consiste à comparer la circonférence d'un cercle à celle de deux polygones réguliers de 96 côtés, l'un étant inscrit et l'autre circonscrit. Il obtient ses polygones à partir d'un hexagone en doublant successivement les côtés. Dans le *Compteur de sable* Archimède se propose de calculer le nombre de grains de sable dans l'univers, à supposer que l'univers en soit remplit. Bien sûr, il doit faire des hypothèses quelque peu arbitraires sur les dimensions de la terre et de l'univers. Il suppose par exemple que la circonférence de la terre mesure moins de 3,000,000 de stades. Il s'adresse au roi Golon:

"Au roi Golon, certains pensent que le nombre de grains de sable est infini; je ne parle pas seulement du sable au voisinage de Syracuse et de la Sicile mais aussi du sable que l'on peut trouver dans toutes les régions habitées ou inhabitées. Il y en n'a d'autres qui pensent que si ce nombre est fini il est tellement grand qu'il est impossible de nommer un nombre qui soit aussi grand. ... Je vais tenter de vous montrer au contraire que parmi les nombres que j'ai introduis dans le travail que j'ai envoyé à Zeuxippus, certains sont plus grands que le nombre de grain de sable qu'il faudrait pour remplir la terre entière et même l'univers entier..."

Le système de numération grec traditionnel ne permet pas de nommer des nombres beaucoup plus grands qu'une myriade (10^4). Le véritable but d'Archimède est de montrer qu'il existe un système de numération permettant de désigner des nombres d'une grandeur inimaginable. Dénotons une myriade de myriades par $M = 10^4 \times 10^4 = 10^8$. Archimède commence par dire que les nombres $n \leq M$ sont du *premier ordre*. Il dit ensuite que les multiples entiers $n \cdot M$ pour $n \leq M$ sont les nombres du *second ordre*. Le plus grand nombre du second ordre est M^2, c'est à dire une myriade de myriades de myriades de myriades. Il appelle ensuite nombres du *troisième ordre* les multiples entiers $n \cdot M^2$ pour $n \leq M$. Le plus grand nombre du second ordre est alors M^3. Continuant ainsi, on arrive éventuellement aux nombres d'*ordre* M qui sont de la forme $n \times M^{M-1}$ pour $n \leq M$. Le plus grand nombre de cet ordre est

$$P = M^M = 10^{8 \cdot 10^8}.$$

Mais Archimède ne s'arrête pas là. Il déclare que les nombres $1 \leq n \leq P$ sont de première *période*. Il dit ensuite que les nombres $n \cdot P$ pour $n \leq M$ sont du *premier ordre et de seconde période*; le plus grand de cette catégorie est $MP = M^{1+M}$. Il dit ensuite que les nombres $n \cdot MP$ pour $n \leq M$ sont du *deuxième ordre et de seconde période*; le plus grand d'entre eux est $M^2P = M^{2+M}$. Continuant de cette manière on arrive aux nombres *d'ordre* M *et de seconde période*, le plus grand d'entre eux étant $M^MP = P^2$. Archimède déclare ensuite que les multiples entiers $n \times P^2$ de P pour $n \leq M$ sont du *premier ordre et de troisième période*; le plus grand de cette espèce étant $M \cdot P^2$. Continuant de cette manière on atteint les nombres *d'ordre* M *et de troisième période*, le plus grand de cette espèce étant $M^MP^2 = P^3$. Continuant ainsi on arrive aux nombres *d'ordre* M *et de période* M, le plus grand de cette espèce étant

$$P^M = (M^M)^M = M^{M^2} = (10^8)^{10^{16}} = 10^{8 \cdot 10^{16}}.$$

S'il fallait nommer le nombre P^M en disant que c'est une "myriade de myriades de myriades de myriades..." il faudrait répéter le mot myriade 10^{16} fois, soit 10 millions de milliard de fois. Archimède semble avoir été le premier à utiliser les lois exponentielles:

$$A^{m+n} = A^n A^n, \quad A^{mn} = (A^m)^n.$$

Ajoutons qu'Archimède fut le premier à calculer le volume et l'aire d'une sphère de rayon r:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad A = 4\pi r^2.$$

Il fut aussi le premier à calculer l'aire d'un segement de parabole. Sa méthode consiste essentiellement à calculer l'intégrale

$$\frac{b^3 - a^3}{3} = \int_a^b x^2 dx,$$

deux mille ans avant l'invention du calcul différentiel et intégral! Archimède mourut de mort violente après la prise de la ville de Syracuse par les romains au temps de l'empereur Marcellus. Après la conquète un soldat s'introduisit dans sa villa. Il trouva Archimède absorbé dans la contemplation d'un diagramme, perdu dans ses réflexions. Le soldat lui intima l'ordre de se rendre sur le champ auprès de Marcellus. Archimède refusa en disant qu'il devait d'abord résoudre le problème qui l'absorbait. Le soldat se mit en colère et le tua d'un coup d'épée. L'empereur Marcellus en fut très chagriné. Il fit ériger sur le tombeau d'Archimède un monument comportant un cylindre surmonté d'une sphère.

Claude Ptolémée a vécu à Alexandrie et Athènes vers le milleu du deuxième siècle après JC. Astronome et mathématicien, on lui doit l'invention de la trigonométrie. Son oeuvre principale est l'*Almageste* qui contient une histoire de l'astronomie ancienne et un exposé complet du système géocentrique, dit *système de Ptolémée*. L'oeuvre contient aussi un traité complet de trigonométrie plane et sphérique, avec des tables donnant la longueur $\mathrm{cord}(\theta)$ d'une corde dans un cercle en fonction de la longueur θ de l'arc correspondant ($\mathrm{cord}(\theta) = 2\sin(\theta/2)$). On lui doit les formules d'addition des angles pour les fonctions trigonométriques. Il introduisit le système sexagésimal en trigonométrie, avec la division des degrés en 60 minutes et des minutes en 60 secondes. Ptolémée était aussi géographe. Il publia la meilleure atlas du monde connu à son époque. Il inventa des instruments d'astronomie comme l'astrolabe qui porte son nom. Il publie des études sur l'optique et l'acoustique.

Diophante a vécu à Alexandrie au troisième siècle après JC. Son oeuvre principale est l'*Arithmetica*. Elle a été publiée en 13 volumes vers 275 mais il n'en reste que 6. L'oeuvre est consacré aux équations algébriques. Les équations considérées sont toujours particulières et Diophante ne cherche que des solutions *entières ou rationnelles*. Aujourd'hui on appelle *Diophantine* une équation que l'on veut résoudre en nombres entiers ou rationnels. Par exemple, les triplets Pythagoricien (a, b, c) sont des solutions de l'équation Diophantines $a^2 + b^2 = c^2$. Le problème de Fermat est Diophantin car il consiste à vouloir montrer que l'équation $a^n + b^n = b^n$ n'a pas de solutions en nombres entiers si $n > 2$. Diophante aborde des problèmes de nature purement arithmétique comme celui de la représentation d'un nombre entier comme la somme de deux carrés. Par exemple, on a

$$2 = 1^2 + 1^2, \quad 5 = 2^2 + 1^2, \quad 10 = 3^2 + 1^2, \quad 13 = 2^2 + 3^2, \quad 17 = 4^2 + 1^2.$$

Diophante fait l'observation suivante: *"C'est de la nature de 65 de pouvoir s'exprimer comme somme de deux carrés de deux manières différentes, 16+49 et 64+1; la raison se trouve dans la factorisation* $65 = 5 \cdot 13$ *car les facteurs sont eux-mêmes sommes de deux carrés"*. Selon André Weil [W] cette observation montre que Diophante connaissait l'identité algébrique

$$(x^2 + y^2)(z^2 + t^2) = (xz \pm yt)^2 + (xt \mp yz)^2.$$

En effet
$$65 = 5 \cdot 13 = (2^2 + 1^2)(3^2 + 2^2) = (6 \pm 2)^2 + (4 \mp 3)^2.$$
Les observations de Diophante auront une très grande importance pour le développement ultérieur de la théorie des nombres. Mais pour cela, il faudra attendre Fermat 13 siècles plus tard.

Après la conquète romaine, seule Alexandrie conserva vivante l'éclat de la civilisation grecque pour quelques siècles encore. La bibliothèque d'Alexandrie, créée environ 300 ans avant JC, fut la plus grande de l'antiquité (700,000 volumes). Une partie de la bibliothèque fut incendiée en 48 avant JC lors d'une insurection contre Cesar. Elle fut entièrement incendiée par des chrétiens en 390 après JC. Les trésors d'information qu'elle renfermait sur le monde antique disparurent à jamais. Signalons que la première mathématicienne de l'antiquité, Hypatia, était citoyenne d'Alexandrie (370-415 après JC). Elle étudia la philosophie et les mathématiques à Athènes avant de se fixer à Alexandrie pour y fonder une école. Malheureusement, il ne reste rien de ses travaux. Elle mourut massacrée par la foule excitée contre elle par des moines chrétiens. L'Égypte a construit récemment une immense bibliothèque à Alexandrie. C'est la plus grande du monde musulman.

§6 La civilisation Romaine

La civilisation romaine contribua peu au développement des sciences et de la philosophie. Elle réalisa toutefois des ouvrages d'ingénierie remarquables commes les acqueducs. On doit à Galien certains progrès de la médecine. La civilisation romaine contribua aussi au développement du droit.

Un mythe ancien attribue la fondation de Rome à Romulus et Rémus au 8e siècle avant JC. Nos deux héros auraient été élevés par une louve, buvant le lait de ses mamelles. En réalité, la ville de Rome aurait été fondé par les Etrusques dont la civilisation raffinée a précédé celle de Rome dans la péninsule Ibérique. La conquête de cette péninsule constitue la première phase de l'expansion Romaine. Elle se termine en 272 avant JC par la prise de de Tarente, dernière ville grecque de la péninsule. La deuxième phase est celle la conquète du bassin méditerranéen de 264 à 118 avant JC. Elle commence par la prise des villes grecques de Sicile. et la lutte contre Carthage. La ville grecque de Syracuse est prise en 212 avant JC (Archimède est tué). Rome est jalouse de Carthage sa rivale en Afrique du Nord. Après une série de trois guerre (les guerres Puniques) Carthage est prise en 146 avant JC. Ses habitants sont massacrés, Carthage démolie. Durant cette période Rome s'attaque aussi à la Macédoine et à la Syrie. En 139 avant JC elle compte plusieurs provinces nouvelles: la Macédoine, la Grèce, la Syrie, l'Espagne et la Narbonnaise (la Provence).

Les contacts répétés avec la civilisation hellénique et celle de l'Orient eurent une influence sur les moeurs de romains. En Égypte, la femme jouissait des même droit que l'homme. Le divorce fut autorisé dans l'empire romain et il devint fréquent. La femme put disposer de ses biens. La citoyenne romaine devint l'égale du citoyen. Les romains se sensibilisèrent aux questions intellectuelles au contact des Grecs. Le stoicisme se répandi. Caton l'Ancien tenta de s'opposer à ce qu'il percevait comme une dégénéressence de l'idéal romain. Il prona la retour aux vertus traditionelles qui avait fait la puissance de Rome.

Les conquètes de Rome perturbèrent profondément son équilibre social et économique. L'oligarchie s'était enrichie énormément mais la pblèbe s'était appauvrie. Une lutte devait s'ensuivre entre les *populares* et l'oligarchie sénatoriale. Spartacus dirigea une révolte des exclaves en 73 avant JC; après de nombreuses victoires il est vaincu par Crassus. Pour mettre de l'ordre dans l'empire un *triumvirat* constitué de Crassus, de César et de Pompée dirige Rome pour quelques temps. César se fait attribuer le proconsulat de la Gaule et part à sa conquète. Mais Crassus meurt en son absence et le triumvirat est dissous. Pompée se fait alors donner plein pouvoir par le Sénat. Il commande le rappel de César à Rome et le licencement de ses troupes. Mais celui-ci s'ést rendu populaire par ses campagnes en Gaule. A son retour, il franchit le Rubicon et marche sur Rome à la tête de ses armées. Une guerre civile est déclenchée qui durera quatre ans. Pompée s'enfuit en Égypte et meurt assasiné. Comme Alexandre le Grand, César se fait reconnaitre fils du dieu Amon et devient roi d'Égypte. Il épouse Cléopatre qui lui donne un fils Cesarion. Il est alors maître du monde méditerranéen. Il se lance alors dans une série de réforme des institutions romaines qui auront pour effet de restaurer l'équilibre à l'avantage des *populares*. Il redistribue les terres de l'État aux pauvres et il réforme l'impôt. Il développe le droit romain. Il donne à toutes les villes d'Italie une structure politique qui ressemble à celle de Rome. Mais il souhaite transmettre ses pouvoirs à son fils Césarion. Pour y arriver il veut se faire désigner roi. Mais il se fera assasiner par Brutus à la scéance du Sénat qui devait lui accorder ce titre (en 44 avant JC).

L'assasinat de César rallume la guerre civile. Octave, fils adoptif de César, s'empare du pouvoir à Rome. Cléopatre épouse Antoine en Égypte. Octave déclare la guerre à Antoine. Antoine sera vaincue en 31 avant JC. Il se suicidera avec Cléopatre.

César avait voulu faire de Rome une monarchie. Auguste rétablira formellement les pouvoirs du Sénat en l'an 27 avant JC. Toutefois, les sénateurs ne furent plus élu par le peuple mais nommés par lui. En retour, les sénateurs lui donnèrent le droit de règner à vie. Le peuple perdit tout pouvoir sur la vie politique. Juridiquement, la république subsistait, mais en fait, elle avait disparu. Auguste divisa la société en classes hiérarchisées dotées de statuts juridiques différents. Les citoyens romains recensés étaient environ 5 millions. Les esclaves, privés de tous droits, furent soumis à des sanctions pénales impitoyables. Aux théories démocratiques qui concoivent les hommes comme égaux, Auguste opposa la supériorité des Romains, race dominante.

L'empire romain atteingnit a son apogé sous le règne de l'empereur Hadrien (117-138). Il couvre alors un territoire incorporant l'Angleterre, la Gaule, la Germanie, l'Espagne, le bassin du Danube, la Turquie, la Syrie, la Palestine, l'Arabie et l'Afrique du nord. L'empereur exerce un pouvoir absolu. Il se donne le titre d'*Olympien* réservé à Jupiter. Les empereurs Antonin (117-138) et Marc-Arèle (161-180) revinrent toutefois aux principes constitutionnels. Pour un temps l'empire connait un regime de liberté avec des institutions libérales et le droit romain se développe. La vie intellectuelle reprend à Rome. Le philosophe Plotin (205-270) développe le néo-platoniscisme, une synthèse entre la mystique orientale et les exigences de la rationalité de la philosophie de Platon. Le grand centre scientifique demeure toutefois Alexandrie où Ptolémée formule les théories astronomiques qui ne seront dépassées que par Copernic. Origène, citoyen d'Alexandrie, tente de concilier le christianisme avec les théories néo-platoniciennes. Ses idées ouvrent la voie à l'arianisme (Arius soutient que le Fils est différent du Père). Mais le renouveau intellectuel de l'Empire cherche plus à vulgariser qu'à créér. L'harmonie entre Senat et l'Empereur ne dure pas. L'empereur Caracalla veut imposer à ses sujets le culte du dieu égyptien Sarapis. Des persécutions religieuses de caractère essentiellement politique sont entreprises contre les chrétiens. L'empereur est assasiné en 217 et la conception de l'empereur-dieu est abolie pour un temps. L'anarchie s'installe dans l'empire dont l'étendue rend sa gouverne difficile. Entre 235 et 268 le Sénat et les armées élisent pas moins de 23 empereurs.

Pour rétablir l'ordre dans l'Empire, l'empereur Dioclétien (245-313) installe la dictature. Il divise l'empire en deux: d'un coté l'Occident y compris l'Afrique, et de l'autre l'Orient y compris l'Egypte. Il prend l'Orient et donne l'Occident à Maximilien. La langue de l'Occident est le Latin et celle de l'Orient le Grec. Rome est abandonnée comme capitale et remplacée par Milan. La persécution des chrétiens reprennent. Estimant l'ordre rétablit Dioclétien abdique et il oblige Maximilien à abdiquer. La guerre civile éclate de nouveau. Durant cette période le peuple exploité se tourne progressivement vers l'Église qui s'affirme comme puissance spirituelle et intellectuelle. Les évêques, élus par les fidèles, jouent un rôle d'arbitre, de juge. Pour obtenir l'appui des chrétiens l'empereur Constantin proclame la liberté de culte en 313. Il donne l'empire d'Orient à son fils Constance et celle d'Occident à son fils Constant. Constance fonde Constantinople (ancien Byzance, aujourd'hui Istanboul) qui devient la capitale de l'empire d'Orient (ou Byzantin). Une lutte se développe progressivement entre les deux parties de l'empire. L'empereur Constance et l'Église d'Orient soutiennent l'arianisme alors que l'empereur Constant et l'Église d'Occident s'y opposent. L'empire frôle la guerre de religion. Au 5^{e} siècle commencent les invasions barbares. Les Vandales envahissent l'Occident en 438 ; ils passent en Afrique du Nord en 439. Les Huns envahissent la Gaule en 447. Mais Attila est repoussé à Troyes en 451. L'Empire d'Occident s'effronde en 476. Les deux empires seront progressivement morcellés en territoires féodaux. Les barbares victorieux s'installent mais s'assimilent progressivement en adoptant la religion chrétienne. Pour des siècles encore des rois féodaux se disputeront le titre d'empereur. Après de nombreuses conquètes le roi franc Charles I (Charlemagne) se fera sacrer empereur d'Occident par le pape Leon III en 800. Son empire s'étendra de l'Adriatique au Jutland et aura pour capitale Aix-la-Chapelle. Il entrera en conflit avec l'empire musulman en Espagne. Il tentera sans succès de réunir l'empire d'Orient avec celui de l'Occident. Le *Saint empire romain germanique* sera fondé par le roi germain Othon le Grand Il qui se fera couronner empereur par le pape Jean XII à Rome en 962. En 996 son petit fils, Othon III nommera pape son cousin (Grégoire V) et se fera sacrer emperur par lui. En 999 il nommera pape son ancien précepteur Gerbert (Sylvestre II). Le saint empire romain sera détruit par Napoléon en 1806; Francois II aura été le dernier à le gouverner.

La rupture religieuse entre Rome et Byzance sera consommée par le schisme d'Orient en 1054. L'Église byzantine deviendra l'*Église orthodoxe*. Elle reconnait la doctrine formulée jusqu'au concile de Nicé II (en 787) mais refuse les dogmes introduits plus tard, tels l'immaculée conception de Marie, la suprématie du pape et son *infallibilité doctrinale* (dogme adopté en 1870). Aujourd'hui, l'Église orthodoxe est divisée en *patriarcats*: Constantinople, Alexandrie, Antioche, Jérusalem; en *églises autocéphales*: Grèce, Chypre, Albanie, Serbie, Russie, Roumanie ,Bulgarie, Georgie, Tchéco-Slovaquie, Pologne; et en *églises autonomes*: Canada, Etats-Unies, Finlande, Australie, etc.

§**7 La civilisation musulmane**

Après la chute de l'empire romain, il faut attendre l'emergence de la civilisation musulmane pour voir les mathématiques refleurir. Les musulmans inventèrent l'algèbre sur une période qui dura environ 500 ans.

Mahomet fonda la religion de l'Islam vers 613 après avoir recu la visite de l'archange Gabriel en 610. Il écrivit le *Coran* dans lequel il annonce la venue du jour dernier où les grand de ce monde seront impeccablement chatiés. Un "muslim" est quelqu'un qui remet son âme à Dieu (Allah). En tant que religion monothéiste, l'Islam est issu du judaïsme et du christianisme. Abraham, Moïse et Jésus y sont présentés comme des prophètes et Mahomet comme le dernier d'entre eux. Il appelle les juifs et les chrétiens à se convertir. Le Coran contient des règles pour régir la vie de la communauté des croyants, tant du point juridique et militaire que religieux. Le livre a joué un grand rôle pour répandre l'usage de la langue arabe. Le prophète Mahomet ne fut pas seulement un prêcheur religieux, mais aussi un homme politique, un législateur et un chef militaire. Après avoir conquit militairement La Mecque en 630 il étendit son autorité à toute la péninsule arabique en 631. Peu de temps après la mort du prophète, Omar (634-644), le second calife des musulmans, utilisa l'Islam comme instrument de conquète et d'unification. La Syrie, Jérusalem et Alexandrie furent conquises en quelques années. En 643 l'empire d'Omar s'étendait jusqu'à la mer Caspienne. Mais déjà l'Islam se divisait en sectes hostiles. Une guerre civile opposa les sunnites impérialistes aux shiites de La Mecque qui considéraient que le calife ne devraient pas assumer le pouvoir temporel, mais se limiter au rôle d'*iman* charismatique. Mais les sunnites l'emportèrent après l'assasinat successif de deux gendres du prophète. Le gouverneur de Damas s'empara du pouvoir, rendit le califat héréditaire et fonda la dynastie de Omayyades. Il dota l'empire d'un gouvernement central installé à Damas. La dynastie des Omayyades étendit progressivement l'empire musulman de l'Indus jusqu'à l'Espagne (711) en passant par l'Afrique du Nord. Charles Martel arrêta leur progression en Gaule à Poitiers en 732. Les Omayyades ne cherchèrent pas à convertir les peuples des pays conquis mais ils imposèrent une taxe à tous les non musulmans, ce qui eu pour effet d'encourager un grand nombre à se convertir. Comme les nouveaux convertis voulurent être exemptés de la taxe des conflits apparurent au sein de l'empire. En 750 les Omayyades furent renversés et remplacés par la dynastie des Abbassides qui déplacèrent la capitale de Damas à Bagdad. Les Omayyades s'enfuirent en Espagne où ils installèrent un califat indépendant. Le calife de Bagdad se donna comme un monarque absolu de droit divin mais s'accomoda d'un régime de libéralisme économique. Les pays conquis par l'Islam, comme l'Espagne, purent jouir d'une liberté religieuse. Au 9^{e} siècle l'Islam possédait l'hégémonie économique dans le monde. La monnaie internationale fut celle de Bagdad. L'Espagne devint une puissance économique alors que l'Europe sombrait alors dans la décadence médiévale. Des universités furent créées sur le modèle des écoles d'Alexandrie et d'Athènes. La liberté de pensée permit à des juifs et à des chrétiens d'y enseigner. Désireux de faire de Bagdad une nouvelle Alexandrie les califes fondèrent une bibliothèque, un observatoire astronomique et un centre de recherche baptiseé "Bayt al-Hikma" (Maison de la Sagesse) où fut entrepris un vaste programme de traduction en langue arabe des connaissances de l'époque. Les ouvrages grecs et Hindous furent traduits en arabe, la culture musulmane fut cosmopolite. Le système de numération arabe en usage de nos jours est d'origine indienne. Le philosophe persan Avicenne (980-1037) fit revivre la philosophie de Platon et d'Aristote. L'âge d'or de Bagdad dura environ 2 siècles. Vers l'an 1000 le centre intellectuel du monde musulman se déplaca progressivement vers le califat de Courdou en Espagne. Averroès (1126-1198), cadif de Courdou, y commenta les oeuvres d'Aristote en y développant les aspects matérialistes et rationalistes. On lui attribue la doctrine de la "double vérité", selon laquelle il peut y avoir une distinction et même opposition entre les vérités rationnelles et les vérités révélées par les saintes écritures.

Les musulmans inventèrent l'algèbre sur une période qui dura environ 500 ans.

Travaux des principaux mathématiciens musulmans

• Al-Khwârizmi (Bagdad entre 800 et 847): Théorie des équations quadratiques. Système décimal.

• Abu-Kamil (le Caire entre 850 et 930): Poursuit les travaux d'Al-Khwârizmi.

• Al-Khujandi (vers l'an 990): Théorème du sinus pour les triangles sphériques.

• Al-Karagi (Bagdad vers l'an 1000): Auteur du *Livre suffisant sur la science de l'arithmétique.*

• Omar Khayyam (Nishapur entre 1048 et 1131): Mathématicien, poête, astronome, philosophe. Théorie géométrique des équations cubiques.

• Al-Samaw'al (vers 1170): Poursuit les travaux d'Al-Karagi. Fractions décimales.

• Al-Din Al-Tusi (Perse entre 1201 et 1274): Mathématicien, logicien, astronome, philosophe. Auteur du *Recueil d'arithmétique à l'aide du tableau et de la poussière.*

• Ibn Al-Banna (Maroc entre 1256 et 1321): Mathématicien et astronome. Auteur du *Talkhis.*

• Al-Kashi (Perse vers 1429): Mathématicien et astronome. Auteur de la *Clé de l'arithmétique*, du *Traité sur la circonférence du cercle* et du *Traité sur corde et le sinus.*

Mohammed Al-Khwarizmi est le plus premier mathématicien du temps de l'empire musulman. Il aurait vécu à Bagdad au temps du calife al-Mâmûm. Il serait mort vers 840. Il est l'auteur de tables d'astronomie et de plusieurs traités de mathématiques. Il a écrit le premier traité d'algèbre proprement dit. Le titre de l'ouvrage était "*Précis sur le calcul al-jabr et al-muqabala*". L'opération *al-jabr* (=algèbre) consiste à déplacer dans une équation un terme à soustraire d'un membre vers l'autre (en changeant de signe). Par cette opération, l'équation

$$x^3 + 3x - 10 = 2x$$

devient

$$x^3 + 3x = 2x + 10.$$

L'opération *al-muqabala* consiste à soustraire une quantité de chaque membre. Par cette opération, la dernière équation devient

$$x^3 + x = 10.$$

Le traité d'algèbre contient une série de problèmes concernant la rápartition des héritage. Le Coran fixe d'avance les proportions que chaque parent doit recevoir et cela peu engendrer des problèmes compliqués dṕendant des relations de parenté. Al-Khowârizmi écrivit aussi un traité sur l'arithmétique qui utilise la numération décimale. Le traité fut traduit plus tard en latin par Adelard de Bath (1120) et Robert de Chester (1130) sous le titre "*Algoritmi de numero Indorum*", c'est-à-dire "Algorithme des nombres indiens". Algorithme=Al-Khwarizmi.

Abu Kamil (850-930) poursuit l'oeuvre de son maître Al-Al-Khwarizmi. Il maîtrise les expressions irrationelles comme l'identité

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm \sqrt{a}b}$$

Il résout l'équation

$$\frac{x}{10 - x} + \frac{10 - x}{x} = \sqrt{5}$$

et trouve que $x = \sqrt{125} - 5$.

Al-Karagi (vers l'an 1000) Auteur du *Livre suffisant sur la science de l'arithmétique.* Il écrit un livre d'algèbre *Al-Fakhri* dans lequel il dit que le but de la science du calcul est la détemination des grandeurs inconnues à l'aide de celles connues. Il s'agit d'appliquer les opérations de l'arithmétique aux expressions algébriques contenant des inconnues. Il donne les règles

$$\begin{aligned} x^m \cdot x^n &= x^{m+n} \\ \frac{1}{x^m} \cdot \frac{1}{x^n} &= \frac{1}{x^{m+n}} \,. \\ \frac{1}{x^m} \cdot x^n &= x^{n-m} \end{aligned}$$

Il applique les opérations de l'arithmétique aux monômes et ensuite aux polynômes. Il démontre l'identité

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big)^2$$

Il donne un tableau des coefficients du binôme:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-1} b^2 + \cdots + \binom{n}{2} a^2 b^{n-1} + \binom{n}{1} a b^{n-1} + b^n$$

ainsi que la loi de formation du triangle de Pascal:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Omar Khayyam(1048-1131) est un savant et poête persan. Astronome, il fut chargé d'une réforme du calendrier. Il rédigea un traité d'algèbre, le meilleur de son époque. L'ouvrage contenait une classification des équations du second et du troisième degré. Pour résoudre l'équation $x^2 + px = q$ il écrit qu'il faut successivement "*multiplier la moitié de p par lui-même; additionner q; prendre la racine carré de la somme; et finalement soustraire la moitié de p* ". C'est à dire:

$$x = \sqrt{(p/2)^2 + q} - p/2.$$

Il donne une construction géométrique de la solution d'une équation cubique $x^3 + ax = b$. Il commence par la mettre sous la forme $x^3 + p^2 x = p^2 q$. Il construit la solution en prenant l'intersection de la parabole $x^2 = py$ avec le cercle $x^2 + y^2 = qx$.

Al-Samaw'al(vers 1170) Poursuit les travaux d'Al-Karagi. Introduit les fractions décimales. Un polynôme est représenté par le tableau de ses coefficients. En fait il manipule des expressions pouvant comporter des puissances négatives de l'inconnue (on dit aujourd'hui que ce sont des polynômes de Laurent):

$$\sum_{k=-m}^{n} a_k x^k = a_{-m} x^{-m} + \cdots + a_{-1} x^{-1} + a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Il expose des règles pour manipuler des quantités négatives comme

$$-(-ax^n) = ax^n$$
$$-ax^n - bx^n = -(a+b)x^n$$

Il décrit une méthode permettant d'approximer numériquement la solution d'une équation $x^n = Q$. Sa conception des approximations démontre une familiarité avec le concept de nombres réels. Il dit ... *c'est pourquoi il devient possible de retrouver continûment une quantité rationnelle proche de la quantité irrationnelle et de retrouver une autre quantité rationnelle plus proche que la première de l'irrationnelle, et indéfiniment...* []

Le déclin de la civilisation musulmane commence au 10e siècle avec l'occupation progressive de l'empire musulman par les tribus mongoles Türküt venus des steppes d'Asie centrale. Par leur nomadisme ces tribus détruisent les civilisations raffinées qui s'étaient développées en Asie centrale depuis l'antiquité. Paralysé par le démembrement de l'empire le calife de Bagdad confie en 1055 la défense de la foi islamique aux Turcs Seldjoucides nouvellement convertis à une secte orthodoxe de l'Islam. Les Turcs se jettent dans la guerre sainte et occupent l'Asie Mineure en 1090. La civilisation musulmane s'effronde dans un sursaut de fanatisme religieux. En 1095 le pape Urban II lance la *première croisade* pour préserver l'accès aux Lieux Saints; Jérusalem est prise par les croisés en 1099; des ordres de moines-soldats sont créés pour défendre la conquète (les Hospitaliers et les Templiers). Une *deuxième croisade* est lancée en 1147; le roi Louis VII et l'empereur Conrad échouent devant Damas. Une *troisième croisade* est lancée en 1189 après la prise de Jérusalem par Saladin; après de nombreuses batailles une entente pour une période de 3 ans est conclue entre Richard Coeur de Lion et Saladin. Une *quatrième croisade* est décidée en 1198 par le pape Innocent III mais elle est détournée de son but initial: les croisés s'emparent plutôt de Constantinople pour remplacer l'Empire Byzantin par un Empire Latin. Une *cinquième croisade* est décidée en 1215 par le pape Innocent IV; elle est précédée par la *croisade des Enfants* où des milliers de jeunes pèlerins meurent sur le chemin de la Terre Sainte. Une *sixième croisade* est décidée en 1229 par Frédéric II; il négociera l'accès à Jérusalem avec le sultan d'Égypte. Mais le sultan s'empare de Jérusalem en 1244 et une *septièmme croisade* est décidée en 1229 par Louis IX qui tentera de conquérir l'Égypte. Il est défait et capturé à Mansourah. Libéré après rançon il lancera une *huitième croisade*; il mourra devant Tunis. Une *neuvième croisade* se soldera par une défaite en 1291.

A la fin du 12e siècle Gengis Khan nait dans une tribu mongole à l'ouest du lac Baïkal. Réalisant l'unité des tribus mongoles il se lance à la conquète de la Chine. Il rase Pekin en 1215. Retournant vers l'Ouest il s'empare en 1221 du sultanat türk du Turkestan oriental, de l'Afghanistan et de la Perse (Iran). Les hordes mongoles se livrèrent à de terrible atrocités dans ces pays de civilisation islamique. Les habitants de Merv furent systématiquement décapités; même les chiens et chats furent tués. Contournant la mer Caspienne, une armée mongole passe en Crimée jusqu'aux bouches du Danube. Ils dévastent la Georgie et le Caucase. En une vingtaine d'années Gengis Khan s'est constitué un immense empire, allant de Péking jusqu'à la Volga. A sa mort en 1227 son empire est divisé entre ses trois fils dont l'un est choisit grand Khan. Le grand Khan se donne pour chef religieux des religions de son empire (nestorien, chrétien, taoïste et bouddhiste). L'empire mongol se heurte à l'intransigeance religieuse du calife de Bagad qui prétend imposer son autorité à tous les musulmans, fussent-ils mongols. En 1230 un khanat mongol islamisé se lance dans une guerre sainte contre l'Europe. Il prend Moscou en 1235, Kiev en 1240 et Cracovie en 1257. Le khan mongol de Perse envahit Bagdad en 1258 et s'empare de Damas en 1260. Isolé, il se convertit toutefois au culte musulman avant la fin du siècle. Il rejette l'autorité du grand Khan. Les Turcs Seldjoucides reprennent leur indépendance. Au 14e siècles des tribus turques se lancent à la conquète de l'Empire Byzantin. Ils occupent la Macédoine, la Thrace et la Bulgarie. C'est le début de l'empire Ottoman dont l'expansion marquera toutefois un arrêt temporaire devant l'expansion de l'empire de Tamerlan. En 1363, Tamerlan, un féodal turc du khanat mongol du Turkestan, s'empare du pouvoir et se lance dans une guerre de conquète sous prétexte de guerre sainte. Il se fait proclamer sultan musulman et il part à la conquète de la Perse. Il conquiert Bagdad, pousse jusqu'à la Volga, atteint la Crimée, envahi l'Inde. En 1402 il écrase l'armée des Ottomans. Mais l'empire Ottoman sera sauvé de la destruction par la mort de Tamerlan en 1405. À sa mort, Tamerlan règne sur un empire qui comprend l'Asie centrale, la Syrie, l'Iran et le nord de l'Inde. L'empire sera partagé entre ses quatres principaux descendants qui règneront séparément sur la Perse, la Transoxiane et l'Afghanistan. En 1453 l'empereur Ottoman Mehmet II s'emparera de Constantinople. Son fils Süleyman (1520-1566) dit *Le Magnifique* poursuivra cette oeuvre de conquète. Il placera la majorité des pays arabo-musulman sous son autorité (sauf le Maroc). Il occupera Belgrade, la Hongrie et la Transylvanie. Sa flotte dominera la méditerranée orientale. Mais l'empire Ottoman souffre d'un désiquilibre économique qui ne fera que s'accentuer avec le temps: il vend ses matières premières à Occident pour lui acheter ses produits manufacturés en retour. Au 18ᵉ siècle l'empire ne connait que des revers face à la puissance russe. En 1811 le sultan d'Égypte Muhammed Ali libère son pays du joug de l'empire. Au 19ᵉ-siècle la Grèce deviendra autonomne suivit de l'Algérie, de la Serbie, de la Moldavie et de la Valachie. Ces deux derniers pays s'uniront en 1862 pour former la Roumanie. Une guerre contre les Russes aboutira à un nouvel affaiblisement de l'empire. Après une courte période libérale, l'empereur Ottoman Abdül-Amid II suspendra la constitution et rétablira son pouvoir absolue en se fondant sur une idéologie pan-islamique. Les Arméniens seront massacrés en 1896 (un génocide). En 1909 le mouvement progressites des "Jeunes Turcs" renversera le sultan et désignera Mehmet V comme son successeur. Mais le mouvement abandonnera rapidement son programme pour le remplacer par un ultra-mationalisme pronant le pan-turquisme. Durant la guerre 1914-1918 l'empire Ottoman est entrainé du coté de l'Allemagne. Après la défaite, l'empire sera démembré et la république de Turquie sera proclamée.

§8 La Renaissance

Au 12ᵉ siècle des européens voyageant en Espagne rapportent des ouvrages arabes et commencent à les traduire en latin. Les Éléments d'Euclide et des pans entiers de l'oeuvre d'Aristote et de Platon, parvinrent à l'Europe traduit de l'arabe plutôt que du latin. L'Espagne devint la porte d'entré en Europe de la culture musulmane et de la culture hellénistique qu'elle véhicule. Ce flux culturel permit à l'Europe de sortir progressivement des perspectives bornées du Moyen Age. C'est le début de la *Renaissance*, vaste mouvement culturel qui fera renaitre les valeurs de l'antiquité au sein de la civilisation européenne. En 1275 Marco Polo entreprend un long voyage qui le mênera jusqu'en Chine. À son retour il écrit le *Livre des merveilles du monde*. Entre 1200 et 1500 plus de 80 universités furent créés à travers l'Europe. Mais le bouillonnement d'activités intellectuelles ne fut pas sans engendrer des tension entre les conservateurs et les progressistes. Ainsi, l'affirmation d'Aristote selon laquelle le monde est éternel est contredit par la Bible. En 1231 le pape Gregoire IX créa l'Inquisition pour lutter contre l'hérésie. La vérité scientifique est-elle soumise aux dogmes de la religion?. La théologie est-elle une science? Thomas D'Aquin (1228-1274) tente de répondre à ces questions dans sa "Somme Théologique" et il s'oppose aux idées d'Averroès. En 1441 Gutenberg invente l'imprimerie. L'Europe abandonne progressivement les valeurs médiévales liées à la féodalité. Le commerce et l'industrie font d'énormes progrès. En 1460 une Bourse est créée à Anvers, alors la plus grande ville du monde. C'est le début du capitalisme moderne. Craignant de perdre d'avantage d'influence l'Église crée la Suprême Inquisition. En 1492 Isabelle de Castille permet à Christophe Colomb de partir à la conquète du Nouveau Monde en partant d'Espagne. La même année, elle oblige les musulmans (les Maures) et les juifs (les Séfarades) à se convertir au christianisme ou bien à quitter l'Espagne. Pour la remercier de sa politique religieuse le pape lui attribue le titre de *Reine Catholique* (catholique=universel!). L'exode des juifs et des musulmans plonga l'Espagne dans une crise économique en la coupant de ses voies traditionelles de commerce. Pour renflouer ses coffres la couronne espagnole organisa le pillage systématique des trésors des civilisations précolombiennes; au 16ᵉ siècle le flux d'or vers l'Espagne fut tellement volumineux que son prix chuta considérablement dans tout l'Europe; il en résulta une hausse du prix en Espagne qui paralysera le développement économique de ce pays pour une longue période. En 1520 Martin Luther publie son *"Petit traité de la liberté humaine"*. Il est excommunié par l'Église. C'est le début du Protestantisme et de la Réforme. En 1543 Copernic propose le système héliocentrique dans un livre publié quelques jours avant sa mort (on est jamais trop prudent). En 1600 le moine philosophe Giordano Bruno publie l'ouvrage *"De l'infinie de l'univers et des mondes"*. Il est arrêté par la Suprême Inquisition, condamné à mort et brulé vif à Rome. En 1609 Galilé fabrique un télescope et le pointe vers les astres. Il découvre les cratères de la lune et les satellites de Jupiter. Il publie ses découvertes dans le *Siderius Nuncius* (le Messager des Étoiles). Il soutient les idées coperniciennes. Un tribunal de l'Inquisition l'oblige à se rétracter. L'Église condamne les idées coperniciennes en 1616.

Fibonacci. L'un des grands mathématiciens du 13^{e} siècle est Léonard de Pise connu sous le nom de Fibonacci. Il écrivit "*Liber Abbaci*", le "Le Livre du Calcul", dans lequel il explique le système de numération arabe ainsi que les bases de l'algèbre. Fibonacci introduisit une suite des nombres $F_0, F_1, F_2, \ldots$ qui porte son nom:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...$$

Par définition, on a $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pour $n > 1$. Ces nombres ont des propriétés remarquables; ils font toujours l'objet de nombreuses recherches.

Tartaglia et Cardan. Au 16^{e} siècle plusieurs mathématiciens italiens s'efforcent de résoudre des équations du troisième degré. La solution aurait été découverte indépendamment par Scippione del Ferro (1456-1526) et Niccolo Tartaglia (1500-1557). Les découvreurs n'ont pas publié leur solution. Mais Tartaglia confie cette solution à Jérome Cardan, un compatriote médecin et mathématicien. Celui-ci la publie dans son *Ars Magna* en 1545. On dit aujourd'hui que la solution de l'équation $x^3 + bx = c$ est donnée par la *formule de Cardan*:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{D} + \frac{c}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{D} - \frac{c}{2}}$$

où l'on a posé $D = \frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}$. Les quantités b et c peuvent prendre des valeurs négatives. Toutefois, lorsque $D < 0$ la formule de Cardan présente un problème sérieux car il faudrait prendre la racine carrée d'un nombre négatif. Cardan dit que c'est le cas *irréductible*. Cardan tente de poursuivre le calcul avec des nombres qu'il qualifie d'*absurdes*. Cardan échoue à résoudre l'équations du quatrième degré, mais il pose le problème à son étudiant Ferrari qui trouve la solution malgré son jeune âge.

Bombelli. (1526-1572) Il poursuit les travaux de Cardan en les systématisant. Il publie une "*Algèbre*" qui donne les règles de multiplication des nombres complexes:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Il observe que l'on a $(2 \pm i)^3 = 2 \pm 11 \cdot i$, ce qui lui permet d'obtenir la solution de l'équation $x^3 = 15x + 4$ (un cas qualifié d'irréductible) en utilisant la formule de Cardan:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{2 + 11 \cdot i} + \sqrt[3]{2 - 11 \cdot i} \\ &= (2 + i) + (2 - i) = 4. \end{aligned}$$

François Viète (1540-1603) fit plusieurs contributions à l'algèbre et à la trigonométrie. Il est le premier à donner une formule permettant de calculer exactement le nombre π:

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \times \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} \times \cdots.$$

Il est auteur d'un traité d'algèbre célèbre "*Isagoge in Artem Analyticam*". Ses notations algébriques sont proches des notations modernes. Par exemple, il écrit

$$1QC - 15QQ + 85C - 225Q + 274N \ \text{ aequatur } \ 120$$

pour l'équation $x^6 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$. Pour Viète une différence $a - b$ n'a de sens que si $a \geq b$. Il exclua les nombres négatifs de son traité bien que ces nombres aient été d'usage assez répandu à son époque. Viète fait une description ingénieuse de la solution de l'équation du troisiìme degré

$$y^3 + 3by = 2c.$$

On supposant que $z^3 + yz = b$ il obtient que $z^6 + 2cz^3 = b^2$. Cette dernière équation est du second degré en z^3 car $z^6 = (z^3)^2$. On peut donc calculer z^3, ensuite z et finalement y.

Remarque: Le symbole moderne d'égalité "=" a été introduit par Robert Recorde dans son livre d'algèbre *Whetstone of witte* (1551). Recorde explique son choix en disant que *rien n'est plus égaux que deux traits parallèles.* Il a fallut un certain temps pour que la notation soit universellement adoptée.

§ 9 L'Europe de 1600 à 1900

Au 16e siècle un penseur comme Montaigne (1533-1592) explore l'idée que "chaque homme porte la forme entière de l'humaine condition". Au 17e siècle un penseur comme Hobbes (1588-1679) soutient qu'il est de la nature de l'homme de vouloir satisfaire ses désirs; il écrit que "La félicité est une continuelle marche en avant du désir, d'un objet à un autre, la saisie du premier n'étant encore que la route qui mêne au second". Il dit que dans l'état naturel, la compétition entre les hommes dans la poursuite de la satisfaction et du pouvoir engendre la violence. D'après lui "L'homme est un loup pour l'homme". Il dit aussi que l'homme invente des lois qu'il s'impose et impose à ses semblables pour échapper à l'état de guerre et de destruction propre à l'état de nature. A partir du 17e siècle les progrès de la science s'accélèrent et l'industrie se développe à grands pas. La bougoisie s'agrandit et les régimes féodaux s'affaiblissent. L'Angleterre du 17e siècle est déchiré par les guerres civiles et religieuses. Le parlement (constitué surtout de nobles) limite le pouvoir royal. Cromwell fait décapiter le roi en 1649; il impose une dictature sous le couvert du parlement mais la monarchie est restuarée en 1660.

René Descartes (1596-1650) est à la fois philosophe et mathématicien. Il dit vouloir libérer l'homme des préjugés de l'enfance et de la religion. Dans son *Discours de la méthode* il tente de fonder la connaissance humaine sur la raison et quelques évidences premières. Il part de l'affirmation "*cogito ergo sum*" (je pense donc je suis) pour en déduire l'existence du monde et de Dieu. Il en déduit aussi la loi de conservation du mouvement en s'appuyant sur la principe que rien ne peut détruire ce que Dieu a créé. Sa philosophie est matérialiste malgré ses spéculations théologiques. Il admet l'existence de l'âme humaine mais concoit le corps comme une machine. En géométrie on lui doit l'introduction des *coordonnées.* Dans sa *Géométrie* il montre comment un système de coordonnées permet de transformer un problème d'algèbre en un problème de géométrie et vice versa. Il montre que les coniques sont décrites par des équations du second degré en deux variables. Les notations algébrique de Descartes sont presques modernes. Ainsi, pour l'équation $y = ax^3 + bx^2 + cx$ il écrit

$$y \ \propto \ ax^3 + bxx + cx$$

Curieusement, Descartes se méfie des nombres négatifs. Il qualifie de *fausses* les racines négatives d'un polynôme. Il ne considère que les points du plan dont les coordonnées sont positives, ce qui revient à ne considérer qu'un seul quadrant. Descartes s'intéresse aussi à l'optique. Il formule la *loi de réfraction* qui porte son nom.

Remarque 1: C'est Newton qui ajoutera des coordonnées négatives au système de Descartes. Les axes d'un système de coordonnées diviseront dès lors le plan en quatre quadrants. Cela fait perdre aux nombres négatifs leur mystère. Newton classifie les courbes cubiques.

Remarque 2: Plusieurs mathématiciens ont contribués au développement de l'interprétation géométrique des nombres complexes. Le premier est Wallis (1616-1703) dans son *De Algebra Tractatus* publié en 1685, mais ses idées sont restées peu connues. Le second est Wessel (1745-1818) dans un papier publié dans les Transactions de l'Académie Danoise en 1798 mais resté ignoré jusqu'à ce qu'il soit traduit en francais en 1897. Le troisième est Argand (1768-1822) dans un "Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométrique". Il découvre que la multiplication par i est une rotation de 90$^{\text{e}}$ autour de l'origine. On dit parfois que le plan complexe est le *plan argésien.*

Blaise Pascal (1623-1662) est mathématicien, philosophe et théologien. Il fait des contributions importante à la géométrie, à l'algèbre et au calcul des probabilités. Il invente la première machine à calculer. Il montre que les coefficients du binôme

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{1}xy^{n-1} + y^n$$

figurent dans le *triangle de Pascal*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ & & & \cdots & & & \end{array}$$

qu'il engendre en utilisant la relation $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$. Il montre que l'on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Pascal est l'un des premier à faire usage de raisonnements par récurrence.

Pierre de Fermat (1601-1665) était magistrat à Toulouse. Amateur de mathématiques, principalement de théorie des nombres, il étudia une traduction latine du texte grec de Diophante qu'avait publié Bachet de Mézirac en 1612. Il s'intéresse alors aux nombres premiers. Il démontre qu'un nombre premier de la forme $4n+1$ est une somme de deux carrés. Il démontre que si un nombre premier p ne divise pas un entier a alors il divise l'entier $a^{p-1}-1$. On dit aujourd'hui que ce résultat est le "petit théorème de Fermat". Les mathématiciens du temps de Fermat aimaient se lancer des défis. Fermat propose de montrer que si un entier $A > 0$ n'est pas un carré parfait alors l'équation (dite de *Pell-Fermat*)

$$x^2 - Ay^2 = 1$$

possède une solution en nombres entiers $x, y > 0$. Par exemple, si $A = 61$ la plus petite solution est donnée par $x = 1766319049$ et $y = 226153980$. Wallis et Brouncker trouvent un algorithme permettant de calculer une solution mais la preuve de sa validité ne sera démontré que plus tard par Lagrange. Fermat est célèbre pour avoir énoncé le "grand théorème de Fermat" qui dit que l'équation

$$x^n + y^n = z^n$$

n'a pas de solutions en nombres entiers $x, y, z > 0$ lorsque $n > 2$. L'énoncé se trouve dans une marge d'un exemplaire de l'Arithmétique de Diophante trouvé après la mort de Fermat mais la démonstration de Fermat n'a pas été retrouvée. Le résultat a été démontré récemment (en 1994) par Andrew Wiles. Les contributions scientifiques de Fermat ne se limitent pas aux mathématiques. En optique il énonçe le *principe de Fermat* qui dit que que la lumière emprunte toujours le chemin de durée minimale (plus exactement de durée extrémale) pour aller d'un point à un autre dans un millieu transparent. Le principe permet de lier l'indice de réfraction d'un liquide à la vitesse de propagation de la lumière dans ce liquide. Fermat en déduit la loi de réfraction de Descartes.

Isaac Newton (1642-1727) est l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Co-inventeur du calcul différentiel et intégral avec Leibniz, ses travaux constituent un véritable triomphe de la science et de

la philosophie rationaliste. Il explique les lois de Kepler sur le mouvement des planètes à partir de la loi de gravitation universelle
$$F = G\,\frac{Mm}{r^2}.$$
Il trouve la loi de Newton $F = ma$ à la base de la dynamique. Il invente les équations différentielles. Il découvre le *binôme de Newton*

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

valide pour un exposant α quelconque. En géométrie Newton il étudie et classifie les *cubiques*. Ces courbes sont définies par des équations du troisième degré en deux variables:

$$a\,x^3 + b\,x^2y + c\,xy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + iy + j = 0$$

C'est Newton qui trouve le développemnt de Taylor de la série de la fonction exponentielle

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

et des fonctions trigonométriques

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Il invente une méthode générale pour calculer les solutions d'une équation $f(x) = 0$ par approximations successsives. Voici cette méthode: si $f(a) = 0$ et $f'(a) \neq 0$ alors a est la limite de la suite $a_1, a_2, a_3, \ldots$ obtenue en partant d'une valeur approchée a_1 et en posant ensuite

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

pour tout n.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) fut à la fois philosophe, mathématicien et juriste. Avec Newton, il est considéré comme le co-inventeur du calcul différentiel et intégral. On lui doit la notation $\frac{dy}{dx}$ pour désigner la dérivé d'une variable y par rapport à une autre x, ainsi que la notation $\frac{d^ny}{dx^n}$ pour les dérivés supérieures (Newton dénote la dérivé première par $\dot{y}$ et la dérivé seconde par $\ddot{y}$). C'est Leibniz qui découvrit la formule
$$\frac{d(uv)}{dx} = \frac{du}{dx}\,v + u\,\frac{dv}{dx}$$
ainsi que la règle de dérivation en chaîne
$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}.$$
C'est aussi Leibniz qui introduisit le signe d'intégrale $\int$. C'est en vérité un S stylisé représentant une somme de quantités infiniment petites
$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_a^b f(x)\,dx.$$

que l'on peut approcher par des sommes finies de quantités finis

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Leibniz découvre que

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \cdots$$

et en particulier que l'on a

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

C'est à Leibniz que revient l'idée de *déterminant.* Il découvre les déterminants

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

en examinant le dénominateur de la solution formelle d'un système d'équations linéaire de deux variables

$$\begin{aligned} a_1\,x_1 + a_2\,x_2 &= y_1 \\ b_1\,x_1 + b_2\,x_2 &= y_2, \end{aligned}$$

et de trois variables

$$\begin{aligned} a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + a_3\,x_3 &= y_1 \\ b_1\,x_1 + b_2\,x_2 + b_3\,x_3 &= y_2 \\ c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + c_3\,x_3 &= y_3. \end{aligned}$$

C'est à Leibniz que l'on doit la distinction entre les mathématiques du continu et mathématiques discrètes. À l'âge de vingt ans il écrit un ouvrage *De Arte Combinatoria* dans lequel il invente l'analyse combinatoire. Il formule son rêve de la *caractéristique universelle* c'est à dire *"d'une méthode générale dans laquelle toutes les vérités de la raison seraient réduites à une sorte de calcul. En même temps, ce serait une sorte d'écriture ou de langage universel, mais infiniment différent de tout ce qu'on a proposé jusqu'ici, car les symboles et aussi les mots y dirigeraient la raison; et les erreurs, sauf celle de fait, seraient purement des erreurs de calcul. Ce serait très difficile de former ou d'inventer cette caractéristique mais elle serait très facile à comprendre sans aucun dictionnaire ".* Le rêve de la caractéristique universelle sera une source d'inspirations pour plusieurs générations de logiciens dans les siècles qui suivront, de George Boole à Kurt Godel et Alan Turing. On doit à ce dernier d'avoir montré la possibilité théorique des ordinateurs modernes. Lebniz a laissé une oeuvre philosophique qui continue d'inspirer ceux qui travaillent sur les fondements de la pensée humaine.

Au 17e siècle un penseur comme Montesquieu (1689-1711) développe une théorie du droit naturel et des lois dans une république démocratique. Il dit que la liberté ne consiste pas à "faire ce que l'on veut" mais à "faire ce que les lois permettent". Il dit qu'il faut empêcher l'abus de pouvoir du gouvernement "Pour former un gouvernement modéré, il faut combiner les puissances, les régler, les tempérer, les faire agir; donner pour ainsi dire, un lest à l'une, pour la mettre en état de résister à une autre". Des penseurs comme Hume (1711-1776) et Rousseau (1712-1778) réfléchissent sur l'homme, la nature et la société. Rousseau note que "L'amour de soi, qui ne regarde que nous, est content quand nos vrais besoins sont satisfaits; mais l'amour-propre, qui se compare, n'est jamais content et ne saurait l'être, parce que ce sentiment, en nous préférant aux autres, exige que les autres nous préfèrent à eux; ce qui est impossible". Rousseau cherche à comprendre l'origine de l'inégalité sociale: "Le premier qui, ayant enclos un terrain, s'avisa de dire: *Ceci est à moi*, et trouva des gens assez simples pour le croire, fut le vrai fondateur de la société civile". Il se méfit de l'État car "l'esprit universel des lois de tous les pays est de toujours favoriser le plus fort contre le faible..." Il élabore une théorie du *contrat social* par lequel chaque citoyen aliène volontairement une partie de sa liberté pour la bonne marche de la communauté.

Léonard Euler (1707-1783) est l'un des mathématiciens les plus prolifiques de tous les temps. On lui doit les notations modernes pour les nombres π et e. Il a l'audace de substituer des nombres complexes dans le développement en séries des fonctions usuelles. Il découvre ainsi la *formule d'Euler*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

et obtient en particulier que $e^{i\pi}+1=0$. Euler est un calculateur audacieux. Il traite les séries infinies

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

comme des polynomes de degré infinie qu'il cherche naturellement à décomposer en produit infinie

$$f(x)=a_0\big(1-\frac{x}{r_1}\big)\big(1-\frac{x}{r_2}\big)\big(1-\frac{x}{r_3}\big)\cdots$$

à l'aide des racines $r_1, r_2\cdots$ de $f(x)$. Par exemple, comme la fonction $y=\sin x$ s'annule pour les multiples eniers de π il en déduit que l'on a

$$\sin x=\cdots\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\cdots.$$

Utilisant l'identité $(1+u)(1-u)=1-u^2$ pour regrouper les facteurs de ce produit il obtient le développement en produit

$$\sin x=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots.$$

En comparant ensuite ce produit avec le développement de Taylor

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

il en déduit que

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots.$$

Plus généralement, il obtient par ce procédé les valeurs de la série

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots$$

pour s un entier pair. Il découvre aussi la factorisation

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1-\frac{1}{7^s}\right)\left(1-\frac{1}{11^s}\right)\cdots$$

En mettant $s=1$ dans ce produit il voit que la divergence de la série harmonique

$$\zeta(1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

implique l'existence d'une infinité de nombres premiers. Euler étudie le développement d'un nombre en *fraction continue*

$$x=x_0+\cfrac{1}{x_1+\cfrac{1}{x_2+\cfrac{1}{x_3+\cdots}}}$$

avec x_i un entier >0. Par exemple, on a

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}$$

Il est d'usage de dénoter une fraction continue par $[x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots]$. Euler démontre que seules les irrationnalités quadratiques peuvent avoir un développement périodique. Par exemples, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= [1, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots]\\ \sqrt{3} &= [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots]\\ \sqrt{5} &= [2, 4, 4, 4, 4, 4, 4, \ldots]\\ \sqrt{6} &= [2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, \ldots] \quad .\\ \sqrt{7} &= [2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \ldots]\\ \sqrt{8} &= [2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, \ldots]\\ \sqrt{10} &= [3, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, \ldots]\end{aligned}$$

Il montre aussi que

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots].$$

Euler introduit le concept de *partitions* d'un nombre entier. Rappelons qu'une partition de n est une collection d'entiers > 0 dont la somme vaut n. Par exemple, les partitions de 3 sont $1+1+1$, $1+2$ et 3, et les partitions de 4 sont $1+1+1+1$, $1+1+2$, $1+3$, $2+2$ et 4. Euler introduit la *série génératrice* du nombre de partitions

$$g(x) = 1 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \cdots$$

dont le coefficients p_n est le nombre de partitions de n. Il démontre que

$$g(x) = \Big(\frac{1}{1-x}\Big)\Big(\frac{1}{1-x^2}\Big)\Big(\frac{1}{1-x^3}\Big)\Big(\frac{1}{1-x^4}\Big)\cdots.$$

Il démontre de plus l'identité

$$\begin{aligned}\frac{1}{g(x)} &= \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{1}{2}n(3n-1)}\\ &= 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \cdots\end{aligned}$$

C'est à Euler que l'on doit la *fonction gamma*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^x \, \frac{dt}{t}.$$

Il démontre que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, ce qui entraine que $\Gamma(n+1) = n!$ pour n entier. Il démontre l'identité

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

et en particulier que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Il démontre aussi que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} n^x = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\Big\{\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^x\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{-1}\Big\}.$$

Les raisonnements d'Euler ne sont pas toujours rigoureux mais ses résultats sont presque toujours exacts. Lagrange dira plus tard: *Lisez Euler, c'est notre maitre à tous!*. Les contributions d'Euler ne se limitent pas aux mathématiques. Il fonda le calcul des variations qui devint la base de l'optique et de la mécanique. Il obtint les équations qui régissent le mouvement d'une toupie. Il développa une théorie du mouvement des planètes et des comètes. Il fut l'un des premiers à défendre les idées de Huygens sur la nature ondulatoire de la lumière. Il découvrit plusieurs équations de la mécanique des fluides.

Au 18e siècle les colons anglais qui peuplèrent l'Amérique le firent surtout pour fuir les persécutions religieuses ou politiques dont ils étaient l'objet en Angleterre. Des désaccords concernant les taxes aboutirent en 1774 au boycottage des marchandises imposées par la métropole. La répression anglaise provoqua la guerre d'indépendance en 1775. L'Angleterre capitula en 1781. La *Déclaration de l'Indépendance* marque le début de la démocratie américaine. Le texte rédigé par Thomas Jefferson et Benjamin Franklin dit que *les gouvernements existent pour le bonheur des peuples et qu'ils tirent leur pouvoir de leur l'assentiment.* Il proclame l'égalité et la liberté de tous les hommes. Il prend la géométrie d'Euclide pour modèle en disant "*Nous tenons ces vérités pour évidentes*". Il instaure un libre échange absolue entre les États de l'Union. Mais l'esclavage reste en vigueur dans les États du Sud car revendiqué comme nécessaire par ces États. Il faudra attendre Abraham Lincoln pour que l'esclavage soit complètement aboli après la Guerre de Sécession en 1864.

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) apporte des contributions fondamentales à la théorie des nombres, à la théorie des équations et à la mécanique. En théorie des nombres il démontre que tout nombre entier est une somme de quatres carrés. En algèbre il pose le problème général de la théorie des équations: *est-il possible d'exprimer la solution x d'une équation générale de degré n*

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

en utilisant uniquement un nombre fini d'opérations d'additions, de soustractions, de multiplications, de divisions et d'extractions de racines à partir des coefficients $a_1, \ldots, a_n$? Il se propose d'analyser les solutions des équations de degré 2, 3 et 4 afin de les réduire à des principes généraux. Il s'efforce de comprendre pourquoi on n'avait pas trouvé de solutions pour les équations de degrés $n > 4$. Il introduit le concept de *groupes de permutations* pour analyser les symétries d'une expression polynômiale. Ses méthodes permettront à ses successeurs (Gauss, Abel et Galois) de résoudre entièrement le problème. En mécanique Lagrange cherche à clarifier les concepts de cette discipline pour la fonder sur un petit nombre d'entre eux. On dit aujourd'hui que la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle d'un système mécanique en mouvement est le *lagrangien* du système. Lagrange montre que la connaissance de cette quantité suffit pour obtenir les équations du mouvement du système grâce au calcul des variations. Le langrangien gouverne aujourd'hui toutes les équations de la physique, aussi bien de la relativité générale que de la théorie quantique des champs.

Adrien Marie Legendre (1752-1833) a fait des contributions fondamentales à la théorie des nombres et à la théorie des fonctions. Dans son traité *Théorie des Nombres* il donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation quadratique

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

à coefficients rationnels (a, b, c) possède une solution rationnelle $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Il introduit le *symbole de Legendre*

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \pm 1$$

dont la valeur gouverne l'existence d'une solution à la congruence $x^2 \equiv a$ modulo p pour un nombre premier p. Il conjecture la *loi de réciprocité quadratique*

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

qui aura des répercussions considérables sur la théorie des nombres. Il écrivit un traité sur les fonctions elliptiques dans lequel il réduit les intégrales elliptiques à trois formes standards. Il introduit la méthode des *moindres carrés* permettant d'approximer raisonnablement n'importe lequelle fonction par une droite. Il découvre la formule de duplication de la fonction gamma:

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x) \Gamma(x + \frac{1}{2}).$$

Carl Frederic Gauss (1777-1855) est l'un des plus grands mathématiciens de tout les temps. Il apporta des contributions fondamentales à l'algèbre, à la théorie des nombres, à la théorie des fonctions, à la géométrie, à la physique et à l'astronomie. On lui doit l'expression "*nombres complexes*" pour désigner les "nombres imaginaires". Dans sa thèse de doctorat de 1799 il démontre la théorème fondamental de l'algèbre : *tout polynôme à coefficients complexes de degré* > 0 *possède au moins une racine complexe.* Dans ses *Recherches Arithmétiques* il résout un grand nombre des problèmes de théorie des nombres posés par ses prédécesseurs dont Fermat, Euler, Langrange et Legendre. Il y introduit la notion de *congruence* modulo un entier n. Il développe l'arithmétique des *entiers de Gauss* (ce sont les nombres complexes $a+bi$ où a et b sont entiers). Il généralise les résultats de Fermat sur la représentation d'un entier n comme somme de deux carrés $n = x^2+y^2$ à celui d'une représentation par une forme quadratique binaire:

$$n = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

Ses résultats auront des répercussions profondes sur la théorie des nombres. Gauss étudia les figures géométriques que l'on peut construire en utilisant uniquement une règle et un compas. La géométrie d'Euclide n'utilise que ces instruments pour ses constructions géométriques. Il est facile de construire avec ces instruments des figures comme le carré ou l'hexagone régulier. Une construction du pentagone régulier se trouve dans les Éléments d'Euclide. On peut facilement diviser un angle en deux avec une règle et un compas. Cette opération de division permet de doubler le nombre de côtés d'un polygone régulier déjà construit. Ce qui permet de construire les polygones réguliers de 8, 10 et 12 côtés. Toutefois, les géomètres n'arrivaient pas à construire les polygones réguliers de 7 et 9 côtés.

Théorème. *(Gauss). Un polygone régulier de* n *côtés est constructible par règle et compas ssi on a*

$$n = 2^r p_1 \cdots p_k$$

où $p_1 \dots p_k$ *sont des nombres premiers de Fermat distincts.*

Le théorème montre que les polygones réguliers de 7 et de 9 côtés ne sont pas constructibles, alors que le polygone régulier de 17 côtés est constructible. Gauss conjectura que le nombre $\pi(N)$ de nombres premiers $\leq N$ est asymptotiquement donné par

$$\pi(N) \sim \int_2^N \frac{dx}{\log x}.$$

Gauss fit une contribution importante à la théorie des probabilités en introduisant la *distibution normale*

$$1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Il fut le premier à étudier la géométrie des surfaces générales. Il introduisit le concept de courbure. Il vit que la géométrie non-euclidienne est identique à celle d'une surface de courbure négative constante. Les contributions de Gauss ne se limitent pas aux mathématiques. Il calcula l'orbite de l'astéroïde Céres ce qui permit d'en prédire l'observation. Il contribua au développement d'une théorie de l'électro-magnétisme. En 1833 il inventa le télégraphe électrique qu'il expérimenta avec son ami Wilhelm Weber.

Aux 18e et 19e siècles, l'indépendance des États-Unis provoque une recrudescence du courant de libéralisme en Europe. En Suisse un soulèvement populaire éclate à Genève (1783). En Irlande se forme un parti pour l'indépendance. En Hollande des "patriotes" s'opposent à Guillaume V. La révolution française débute en 1789 alors que les États généraux proclament l'Assemblée constituante. Une Constitution est adopté ainsi qu'une *Déclaration des droits de l'homme et du citoyen.* En 1791 l'Assemblée législative, élue au suffrage censitaire, succède à l'Assemblée constituante. Elle vote la supension du roi Louis XVI en 1792. La même année, la Convention, élue au suffrage universel, succède à l'Assemblée législative. Elle proclame la (Première) République Francaise. Pour prévenir la guerre civile un Comité de salut public est créé qui deviendra l'organe d'une dictature. Pour lutter contre le désordre Robespierre tente d'instaurer son idéal de démocratie *éthique* avec un gouvernement populaire fondé sur la *vertu* ainsi que sur la *Terreur* en temps de crise (*"la vertu sans laquelle la terreur est funeste et la Terreur sans laquelle la vertu est impuissante"*). Il appuiera sa doctrine en instituant un culte de l'*Être suprême.* "L'Incorruptible défenseur du peuple" multiplie les arrestations et les exécutions. Il sera lui-même arrêté et exécuté en 1794. La Convention tente par suite de revenir à une république constitutionnelle en installant le Directoire. Les pays européens sont inquiets et plusieurs, dont l'Angleterre, déclarent la guerre à la France. La France annexera la Belgique et s'emparera de la plus grande partie de la Hollande. Les victoires de l'armée francaise en Italie permettront à son jeune général, Bonaparte, d'imposer ses vues au Directoire. Bonaparte s'engagera dans une campagne en Égypte pour lutter contre l'Angleterre. Bloqué en Égypte, il abandonnera son armée, qui devait y périr, pour regagner Paris et s'emparrer du pouvoir par la force en 1799. La république sera par suite remplacée par une dictature militaire plus autoritaire que la monarchie. En 1804 le Sénat proclame Napoléon Bonaparte comme l'*empereur des français*, il sera *Napoléon I*; le pape Pie VII se déplacera de Rome pour le sacrer empereur à Notre-Dame de Paris. Après de nombreuses guerres de conquètes visant à l'établissement d'un empire français, de l'Espagne à la Russie, Napoléon sera écrasé à Waterloo en 1815. La monarchie française sera rétablie pour un temps mais sur une base constitutionelle. Elle sera reversée en 1848 suite à une émeute à Paris. La *Seconde République* sera proclamée et son premier président sera Louis-Napoléon Bonaparte. N'ayant pu faire reviser la constitution pour se faire réélire en 1852 celui-çi fera un coup dÉtat en 1851. Une modification de la constitution lui permetra de proclamer ensuite la restauration de l'Empire en 1852. Sous le nom de Napoléon III il exercera une véritable dictature jusqu'à sa défaite en 1870. La *Troisième République* sera alors proclamée.

Au 19$^{\text{e}}$ siècle on assista au développement de nouvelles formes d'impérialisme et à l'extension maximale du colonialisme. Le soleil ne se coucha plus sur l'empire britannique tellement il était devenu vaste. Des voies ferrés traversèrent des continents entiers. La production industrielle atteignit des nouveaux sommets avec l'usage systématique des machines à vapeur. Le capitalisme basé sur l'exploitation des masses ouvrières prospéra, particulièrement en Angleterre. Ces développements inspirèrent Karl Marx (1818-1883) dans sa critique radicale du capitalisme. Vers la même époque Charles Darwin (1809-1882) proposa sa théorie de l'évolution des espèces. *L'homme descendait du singe.* Cette théorie fut violemment combattue dans tous les millieux conservateurs et religieux, indépendemment de tout motif scientifique. Elle est encore contestée de nos jours par certains groupes religieux américains qui s'opposent à ce qu'elle soit enseignée dans les écoles. Vers la même époque James Clerk Maxwell (1831-1879) formula les lois générales de l'électromagnétisme. Ces lois ont la forme de quatres équations différentielles particulièrement élégantes. Des calculs formels (algébriques!) basés sur ces équations permirent à Maxwell de prédire l'existence d'ondes électromagnématiques se propageant dans le vide et d'en calculer la vitesse. Comme cette vitesse s'avérait identique à celle de la lumière (mesurée pour la première fois par Fizeau en 1849) il en tira la conclusion que la lumière était elle-même une onde électromagnétique. La découverte de Maxwell fut le point de départ d'une véritable révolution scientifique. Le physicien Heinrich Hertz (1857-1894) confirma expérimentalement les découvertes de Maxwell en 1888. Ces découvertes permirent plus tard à Marconi d'inventer la télégraphie sans fil. La première liaison transatlantique, de Terre-Neuve à l'Angleterre, se fit en 1901. Bientot, *Internet.*

§ 10 Épilogue

Notre description de l'histoire des mathématiques aux 19$^{\text{e}}$ siècle est incomplète. Nous avons encore rien dit sur les travaux de Jacobi, d'Abel, de Galois et de Riemann! Il reste aussi à compléter avec l'histoire des mathématiques aux 20$^{\text{e}}$ siècle.

§ 11 Notes sur les calendriers

Les calendriers sont construit pour la date de certains évênements récurrents comme le début des saisons, les phases de la lune et les fêtes religieuses. Le jour, le mois lunaire et l'année sont les principaux cycles du calendrier. Le jour qui comprend la journée et la nuit resulte de la rotation de la terre autour de son axe. Le mois lunaire résulte de la rotation de la lune autour de la terre et l'année de la rotation de la terre autour du soleil.

La mesure des révolutions de la terre et de la lune

La durée d'un cycle dépend de la manière de le définir. *Le jour solaire* est le temps entre deux passages consécutifs du soleil dans une direction géographique donnée. Le jour solaire a une durée variable avec une moyenne de 24 heures. Les heures ont 60 minutes et les minutes ont 60 secondes. Depuis 1968 la seconde est définie comme 9 192 631 770 périodes de la radiation entre deux niveaux de l'atome de Cesium 133. L'avantage de cette définition est sa grande stabilité.

L'*année tropique* est le temps qui sépare une saison de son retour. Les saisons sont causées par l'inclinaison de 23^{e} qu'il y a entre le plan de l'équateur terreste avec celui de l'écliptique (le plan de l'orbite de la terre autour du soleil). Les solstices et les équinoxes sont des repères naturels séparant les saisons. Le solstice d'été marque le début de l'été par la journée la plus longue de l'année. Le solstice d'hiver marque le début de l'hiver avec la journée la plus longue. L'équinoxe du printemps marque le début du printemps avec une journée égale à celle de la nuit et de même pour l'équinoxe d'automne. Il est difficile de mesurer avec exactitude les solstices et les équinoxes. En moyenne l'année tropique dure

$$\begin{aligned}
1\,\text{année tropique} &= 365\,\text{jours}\;\; 5\,\text{heures}\;\; 48\,\text{minutes}\;\; 46\,\text{secondes}\\
&= 31\,556\,926\,\text{secondes}\\
&= 365.242199\,\text{jours}
\end{aligned}$$

L'*année sidérale* est la durée d'une révolution complète de la terre sur son orbite autour du soleil. Elle est plus longue que l'année tropique d'environ 20 minutes.

$$\begin{aligned}
1\,\text{année sidérale} &= 365\,\text{jours}\;\; 6\,\text{heures}\;\; 9\,\text{minutes}\;\; 10\,\text{secondes}\\
&= 31\,558\,150\,\text{secondes}\\
&= 365.2563657\,\text{jours}
\end{aligned}$$

La différence de 20 minutes est due à la *précession des équinoxes.* Ce phénomène est causé par un lent mouvement de rotation de l'axe de rotation de la terre autour de la perpendiculaire au plan de l'écliptique. Il faut 26,000 ans à l'axe de rotation de la terre pour accomplir une révolution complète. Aujourd'hui orienté vers l'étoile Polaire, cet axe sera orienté vers l'étoile Vega dans 13,000 ans. La région du ciel étoilé qui est visible en chaque saison se déplace imperceptiblement.

Le mois lunaire est normalement définit comme la durée moyenne d'une *révolution synodique* qui sépare deux nouvelles lunes consécutives. La nouvelle lune est le moment du passage de la lune entre la terre et le soleil dans le plan perpendiculaire à l'écliptique. En moyenne le mois lunaire dure

$$\begin{aligned}
1\,\text{mois lunaire} &= 29\,\text{jours}\;\; 12\,\text{heures}\;\; 44\,\text{minutes}\;\; 3\,\text{secondes}\\
&= 2\,551\,443\,\text{secondes}\\
&= 29.53059\,\text{jours}
\end{aligned}$$

Le calendrier égyptien

L'ancien calendrier égyptien remonterait à 4236 ans avant JC. C'est le premier calendrier solaire basé sur l'année de 365 jours. Ils sont réparties en 12 mois de 30 jours, plus cinq jours complémentaires. Les douzes mois sont réparties en 3 périodes de quatres mois:

(i) Akhet (période des inondations):
  (1) Thoth,
  (2) Paophi,
  (3) Athyr,
  (4) Choéac.

(ii) Péret (période des semailles):
  (1) Tybi,
  (2) Méchir,
  (3) Pharménoth,
  (4) Pharmouti.

(iii) Chémou (période des récoltes):
  (1) Pachon,
  (2) Payni,
  (3) Epiphiénoth,
  (4) Mesori.

À l'origine le 1^{er} Thot marquait la période le solstice d'été annoncé par le lever héliaque de l'étoile Sirius et suivit des crues du Nil. Cet évênement a du frapper les prêtres égyptiens. Sirius est étoile la plus brillante de ciel boréal. Comme toute étoile, elle disparait lorsque sa position apparente est proche de celle du soleil. On appelle lever héliaque le moment de sa réapparition avant l'aube dans la direction de l'est. Il y une différence d'environ un quart de jour entre entre la durée de l'année tropique et celle du calendrier. Après un siècle il en résulte un décalage est de 25 jours et le solstice a lieu le 26 Thoth. Les prêtres égyptiens ont observé qu'il fallait 1461 années pour que le solstice se produise de nouveau un 1^{er} Thot. Comme $1461 = 4 \times 365.25$ cela revient à constater que l'année tropique dure 365.25 jours, ce qui est proche de la vérité. Plutot que de modifier le calendrier en introduisant des années bissextiles tous les quatres ans, les prêtres égyptiens ont prétendus que les dieux avaient avaient fait les choses ainsi pour que chaque jour de l'année soit sanctifié par les fêtes marquant le lever héliaque de Sirius. Cette période de 1461 années recu le nom de cycle sothiaque (Sothis est le nom égyptien de Sirius). Toutefois, la *précession des équinoxes* troubla cette belle ordonnance. L'équinoxe avance de vingt minutes par année sur le lever héliaque des étoiles. Le solstice d'été avance pareillement sur le lever héliaque de Sirius. Calculons la durée exacte d'un cycle sothiaque. L'écart δ entre l'année sidérale et l'année de 365 jours du calendrier égyptien est

$$\delta = 365.2563657 - 365.0 = 0.2563657\,\text{jours}$$

Pour que cet écart produise un décalage d'une année sidérale il faut

$$\frac{365.2563657}{\delta} = 1424.747405\,\text{années égyptiennes.}$$

C'est la longueur précise d'un cycle sothiaque. Comme les solstices retardent de

$$365.242199 - 365 = 0.242199\,\text{jours/années égyptiennes,}$$

ils retardent de

$$1424.747405 \times 0.242199 = 345.0723967\text{jours}$$

par cycle sothiaque. Ce qui équivaut à une avance de

$$365.242199 - 345.0723967 = 20.1698023\text{jours}$$

par cycle sothiaque. Autrement dit, le solstice d'été s'est produit 20 jours avant le lever héliaque de Sirius à la fin du premier cycle sothiaque, 40 jours à la fin du second, 60 jours à la fin du troisième.... Ce décalage est la première indication de l'existence de la précession des équinoxes. Remarquer que c'est le résultat d'observations prises par les Égyptiens sur une période de plusieurs millénaires.

Le calendrier julien

Avant Jules César le calendrier romain comportait 12 mois pour un total de 355 jours répartis comme suit:

(i) Martius 31, Aprilus 29, Maius 31,
(ii) Junius 29, Quintilis 31, Sextilis 29,
(iii) September 29, October 31, November 29,
(iv) December 29, Januarus 29, Februarus 28,

Remarquer que Martius est le premier mois de l'année, que December est le 10 ième et que Februarus est le dernier. Cet ancien calendrier avait sans doute une origine lunaire. En effet, d'après des mesures astronomiques le mois lunaire a une durée de 29.530588 jours. Remarquer que $12 \times 29.530588 = 354.367056$. Il y une différence d'environ 10 jours entre entre la durée de l'année solaire et celle de l'ancien calendrier. Comme la civilisation romaine était essentiellement agricole il était important d'accorder le calendrier au rythme des saisons. L'écart de dix jours était comblé par l'ajout d'un mois supplémentaire d'une vingtaine de jours environ tous les deux ans. Ce mois, nommé *Mensis Intercalaris* était placé entre les 23 et 24 février. La durée variable de ce mois supplémentaire était fixée par un collège de pontifes d'une année à l'autre. Le calendrier julien fut introduit par Jules César vers 45 avant JC pour corriger les défauts de l'ancien calendrier. Sous les conseils de l'astronome égyptien Sosigène il introduisit l'année de 365 jours et tous les quatres ans une *année bissextile* qui comporte un jour de plus. La répartition des jours entre les mois était la suivante

(i) Januarus 31, Februarus 29 ou 30 , Martius 31,
(ii) Aprilus 30, Maius 31, Junius 30,
(iii) Quintilis 31, Sextilis 30, September 31,
(iv) October 30, November 31, December 30

Remarquer que Januarus est devemu le premier mois de l'année et December le 12 ième. On honora César en donnant son nom au mois Quintilis qui devint Julius. On honora plus tard Auguste, le successeur de César, en donnant son nom à Sextilis qui devint Augustus. Mais on ajouta aussi une journée au mois Augustus pour qu'il soit légal du mois Julius et aussi parce que les romains considéraient que les nombres pairs étaient néfastes. Comme il faillait bien prendre cette journée supplémentaire quelque part on la retrancha du mois de Février qui devint plus court. La répartition des jours du calendrier julien est la suivante

(i) Januarus 31, Februarus 28 ou 29 , Martius 31,
(ii) Aprilus 30, Maius 31, Junius 30,
(iii) Julius 31, Augustus 31, September 31,
(iv) October 30, November 31, December 30

Le calendrier grégorien

La durée moyenne d'une année du calendrier julien est de 365.25 jours. L'écart entre cette durée et la durée réelle est égale à

$$365.25 - 365.242199 = 0.007801 \, \text{jours}$$

L'écart provoque une lente dérive du calendrier julien sur les saisons. Comme

$$\frac{1}{0.007801} = 128.1886938$$

il suffit de 128 années pour qu'il produise un décalage d'une journée. Pour une période de 1281 années le décalage est de 10 jours. Il est alors assez grand pour être détecté. C'est une coutume chrétienne de fixer la date de Pâques au premier dimanche suivant la première pleine lune de l'équinoxe du printemps. La date officielle de l'équinoxe du printemps avait été fixé au 21 mars par le concile de Nicé qui s'est tenu en 325 après JC. Au moyen Age on commenca à soupçonner que l'équinoxe avait lieu plus tard que la date officielle. On commenca par penser que Sosigène pourrait avoir fait une erreur de quelques jours sur le moment de l'équinoxe. Ayant trouvé une explication, on continua de fixer l'équinoxe du printemps au 21 mars. Toutefois, 13ième siècle on réalisa que l'équinoxe véritable se produisait environ une semaine avant la date officielle et que l'écart était croissant. On comprit que calendrier julien dérivait lentement. Au 16ième siècle le pape Grégoire XIII créa une commission internationale de savants pour étudier la problème et proposer une solution. Suite aux recommendations de cette commission il introduisit le grégorien. Pour corriger le décalage accumulé depuis le concile de Nicé il en supprima 10 jours de l'anné 1582 : le lendemain du jeudi le 4 octobre fut le vendredi 15 octobre. Dans le calendrier grégorien un millésime A est bissextile s'il est divisible par 4 sauf s'il est divisible par 100; mais l'exception est inopérante lorsque A est divisible par 400. Par exemple, les années 1884, 1888, 1892, 1896, et 1904 furent bissextiles mais pas l'année 1900. Toutefois, les années 1984, 1988, 1992, 1996, 2000 et 2004 furent toutes bissextiles. Vérifions que cette règle apporte une correction adéquate. La durée moyenne de l'année conventionelle du calendrier julien est de 365.25 jours. Lorsqu'on supprime une année bissextile tous les siècles on raccourcit la durée moyenne de l'année conventionnelle d'un centième de jours. En cette année bissextile tous les quatres siècles, on allonge la durée moyenne de l'année conventionnelle d'un quatre centième de jours. La durée moyenne en jours de l'année du calendrier grégorien est donc de

$$365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} = 365.2425.$$

L'écart entre cette durée moyenne et la durée réelle est égale à

$$365.2425 - 365.242199 = 0.00031.$$

Comme on a

$$\frac{1}{0.00031} = 3225.80$$

il faut plus de 3000 ans pour le décalage du calendrier grégorien sur l'année réelle soit d'une journée. Les papes pourront se reposer. Par un curieux hasard, Sainte Thérèse d'Avila mourut dans la nuit du 4 au 15 octobre 1582.

La réforme de Grégoire XIII ne fut pas universellement adoptée. Les états protestants des Pays Bas, d'Allemagne et de Suisse s'alignèrent vers 1700. En Angleterre, le lendemain du 2 septembre 1752 fut le 14 septembre 1752 (le retard accumulé était passé à 11 jours). Au Japon le calendrier grégorien fut adopté en 1873. En Chine il fut adopté en 1912. En URSS le 1 février 1918 devint le 14 février; c'est pourquoi la révolution d'octobre 1917 est aujourd'hui fêtée en novembre. La Turquie se rallia en 1924. L'église grecque utilise toujours le calendrier julien; ses fêtes religieuses ont lieu environ deux semaines après celles de l'église romaine.

Aujourd'hui le calendrier grégorien est universellement adopté sauf pour les affaires religieuses. On peut donc juger que la réforme de Grégoire XIII était sage. Mais aurions nous pu faire mieux? Pour en juger développons le rapport

$$\frac{1\,\text{année}}{1\,\text{jour}} = 365.242199$$

en fraction continue:

$$\frac{1\,\text{année}}{1\,\text{jour}} = [365, 4, 7, 1, 3, 5, 20, \ldots].$$

Les premiers convergents de cette fraction sont

$$\frac{365}{1} < \frac{10592}{29} < \frac{46751}{128} < \cdots < \frac{1\,\text{année}}{1\,\text{jour}} < \cdots < \frac{245808}{673} < \frac{12053}{33} < \frac{1461}{4}.$$

On a

$$\begin{aligned}
1\,\text{année} &= 365\,\text{jours} + 0.242199\,\text{jours}\\
4\,\text{années} &= 1461\,\text{jours} - 0.031204\,\text{jours}\\
29\,\text{années} &= 10592\,\text{jours} + 0.02377\,\text{jours}\\
33\,\text{années} &= 12053\,\text{jours} - 0.00743\,\text{jours}\\
128\,\text{années} &= 46751\,\text{jours} + 0.00147\,\text{jours}\\
673\,\text{années} &= 245808\,\text{jours} - 0.0001\,\text{jours}
\end{aligned}.$$

En supprimant l'année bissextile du calendrier julien tous les 128 ans, la durée moyenne en jours de l'année devient de

$$365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{128} = 365.2421875$$

L'écart entre cette durée moyenne et la durée réelle est égale à

$$365.2421875 - 365.242199 = -0.0000115.$$

Comme on a

$$\frac{1}{0.0000115} = 86956.5$$

on voit qu'il faudrait presque de 90 000 ans pour le décalage de ce calendrier sur l'année réelle soit d'une journée (en moins). Les mathématiciens peuvent se reposer.

Le calendrier juif

Le calendrier juif fut fixé au quatrième siècle après JC. C'est un calendrier lunaire qui s'ajuste sur le cycle solaire. Le rapport entre l'année solaire et le mois lunaire est donné par

$$\frac{1\,\text{année}}{1\,\text{mois lunaire}} = [12, 2, 1, 2, 1, 1, 17, \ldots].$$

Les premiers convergents sont

$$\frac{12}{1} < \frac{37}{3} < \frac{136}{11} < \frac{4131}{334} < \cdots < \frac{1\,\text{année}}{1\,\text{mois lunaire}} < \cdots < \frac{235}{19} < \frac{99}{8} < \frac{25}{2}.$$

On obtient que

$$\begin{aligned}
1\,\text{année} &= 12\,\text{mois lunaires} + 10.875143\,\text{jours}\\
2\,\text{années} &= 25\,\text{mois lunaires} - 7.780302\,\text{jours}\\
3\,\text{années} &= 37\,\text{mois lunaires} + 3.094841\,\text{jours}\\
8\,\text{années} &= 99\,\text{mois lunaires} - 1.590620\,\text{jours}\\
11\,\text{années} &= 136\,\text{mois lunaires} + 1.504221\,\text{jours}\\
19\,\text{années} &= 235\,\text{mois lunaires} - 0.086399\,\text{jours}\\
334\,\text{années} &= 4131\,\text{mois lunaires} + 0.0355\,\text{jours.}
\end{aligned}$$

Le fait que 19 années valent presque exactement 235 mois lunaires a été observé 400 ans avant JC par l'astronome grec Meton. C'est le *cycle de Meton* à la base du calendrier juif. Il est possible que le cycle ait été connu par les babyloniens bien avant Meton. Dans le calendrier juif le cycle de 235 mois lunaires comprend 19 années dont douzes années communes avec une durée de 12 mois lunaires et sept années *embolismiques* avec une durée de 13 mois lunaires

$$235 = 12 \times 12 + 7 \times 13$$

Les mois du calendrier juif ont des noms d'origine babylonienne: Nisan, Iyar, Sivan, Tammuz, Av, Elul, Tishri, Cheshvan, Kislev, Tevet, Chevat, Adar. Le treizième mois de l'année embolistique est Adar II. Les années embolismiques sont les troisième, sixième, huitième, onzième, quatorzième, dix-septième et dix-neuvième du cycle de 19 années. Le cycle présent a débuté le 2 octobre 1997. Le cycle de 235 mois lunaires avance sur le cycle de 12 années réelles car

$$235\,\text{mois lunaires} = 19\,\text{années} + 0.086399\,\text{jours.}$$

Comme

$$\frac{19}{0.086399} = 219.9099527$$

la date des fêtes juives subit une avance d'un jour en 220 ans. J'ignore si des corrections à long terme sont prévues pour empêcher la dérive annuelle, mais il suffirait de supprimer le mois lunaire Adar II une fois tous les 6,600 ans. Les années juives sont comptées à partir du moment de la création de l'univers il y a 5763 années en novembre 2002. Voir le site internet `"http://www.jewfaq.org/"`.

Le calendrier musulman

Les musulmans ont un calendrier basé sur le mois lunaire plutot que sur l'année. Les mois islamiques débutent avec l'apparition d'un premier croissant de lune. D'après des mesures astronomiques la durée du mois lunaire est de 29.530588 jours. Une année de 12 mois lunaires vaut approximativement 354 jours

$$12 \times 29.530588 = 354.367056.$$

Une année musulmane comporte douze mois dont six ont 29 jours et six ont 30 jours pour un total de 354 jours. Comparée à l'année réelle une année musulmane est plus courte d'environ 11 jours

$$365.242199 - 354 = 10.875143.$$

Le Coran interdit de corriger cet écart par l'ajout périodique d'un mois supplémentaire. Les fêtes musulmanes se tiennent en conséquence environ 11 jours plus tôt chaque année. Par exemple, le mois du Ramadan débute le 6 novembre en 2002 mais il débutera le 27 octobre en 2003 et le 16 octobre en 2004. Il suffit de 33 ans pour que la date du mois de Ramadan traverse progressivement toutes les saisons. Les musulmans font commencer leur calendrier en 622 après JC, qui est la date de la fuite de Mahomet à Médine. Voir le site internet "http://www.greenheart.com/billh/muslim.html".

§ 12 Bibliographie

Voici nos sources. Nous avons cannibalisé plusieurs textes.

Histoire des mathématiques

History of Mathematics, D. E. Smith. Dover, New York, Berlin.
Une hitoire des mathématiques, A. Dahan-Dalemdico, J.Peiffer. Édition du Seuil, Paris, France.
L'hitoire des mathématiques, R. Mankiewicz, Édition du Seuil, Paris, France.
Histoire des mathématiciens et de physiciens, S. Gindikin. Édition Cassini, France.
La saga des calendriers, Jean Lefort. Belin, Pour la Science, Paris, France.

Histoire des sciences et histoire générale

Panorama de l'Histoire Universelle, J.H. Pirenne. Albin Michel, Paris, France.
La grande aventure de l'humanité, A. Toynbee. Payot, Paris, France.
Les grands penseurs du monde occidental, J.M. Piotte. Fides. Montréal, Canada.
Histoire de la philosophie occidentale, B. Russel. Gallimard, Paris, France.