

## Notes historiques (par André Joyal UQAM)

Ces notes ont été préparées à l'intention des jeunes stagiaires en mathématiques à l'UQAM en juin-juillet 2003.

### Histoire des mathématiques

*History of Mathematics*, D. E. Smith. Dover, New York, Berlin.

*Une histoire des mathématiques*, A. Dahan-Dalemdico, J. Peiffer. Édition du Sueil, Paris, France.

*Histoire des mathématiciens et de physiciens*, S. Gindikin. Édition Cassini, France.

### Histoire des mathématiques sur Internet

The MacTutor History of Mathematics archive: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/>

### Histoire des sciences et histoire générale

*Les grands penseurs du monde occidental*, J.M. Piotte. Fides. Montréal, Canada.

*Panorama de l'Histoire Universelle*, J.H. Pirenne. Albin Michel, Paris, France.

*La grande aventure de l'humanité*, A. Toynbee. Payot, Paris, France.

Il n'y a pas de civilisations sans mathématiques. Pour être complet, il faudrait discuter de la contribution de toutes les civilisations anciennes. Mais cela dépasserait le cadre de ces notes. Nous commencerons avec la contribution des grecs. Celle-ci est exceptionnelle à plusieurs aspects, ne serais-ce que parce qu'on leur doit l'idée de preuve.

La civilisation grecque antique doit son développement à l'expansion de l'économie maritime en Méditerranée vers le 10<sup>e</sup> siècle avant JC. La Grèce comprend un archipel situé en mer d'Égée et ses habitants ont maîtrisé l'art de la navigation. Au 10<sup>e</sup> siècles avant JC, le port de Milet constitue déjà une importante voie de commerce entre l'Empire assyrien et la mer d'Égée. L'expansion du commerce permet l'ouverture de comptoirs dans toute la Méditerranée. Le mouvement donne naissance à des villes grecques en Sicile, en Italie, en France et en Afrique du nord. Au 6<sup>e</sup> siècles avant JC le littoral de la Méditerranée et de la Mer Noire est parsemé d'une centaine de villes grecques. Ces villes sont parfois alliées, parfois en guerre. Des régimes politiques variés s'y succèdent: monarchie, aristocratie, oligarchie, tyrannie, démocratie. Athènes sera démocratique durant près de 250 ans, alors que Sparte sa rivale sera organisée comme un état totalitaire. Mais la société athénienne restera inégalitaire malgré la démocratie: la moitié de ses habitants sont des esclaves ou des métèques; tout comme les femmes, ils sont privés de droits politiques.

Il est certain que les régimes démocratiques favorisent la discussion et la recherche de la vérité. Une des contributions mathématiques les plus remarquable de la civilisation grecque est sans doute l'introduction de l'idée de preuve. Une preuve est essentiellement un argumentaire permettant de convaincre autrui sur une base rationnelle. La rigueur logique de la géométrie grecque restera inégalée durant près de 2000 ans. Elle sera prise comme modèle d'une perfection à atteindre dans plusieurs domaines de la connaissance.

**Thales de Milet** (vers 600 avant JC). Il voyagea en Orient et en Égypte durant sa jeunesse. Il fut commerçant. On raconte qu'il fit fortune en spéculant sur les variations saisonnières du prix de l'huile d'olive. Il devint plus tard homme d'état, mathématicien et astronome. On le considère comme le premier mathématicien

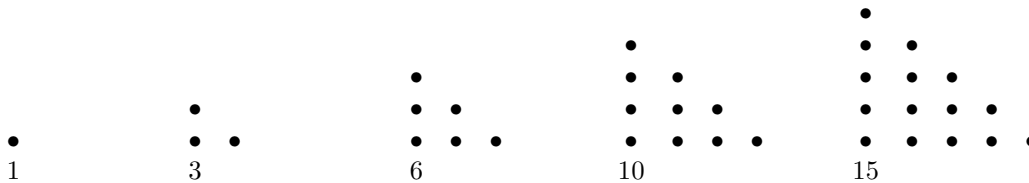
grec. On lui attribue l'idée de preuve. On lui doit les premiers théorèmes de géométrie. Il fonda une école de mathématique. L'historien grec Hérodote raconte que Thales prédisait une éclipse de soleil (probablement celle du 28 mai 585 avant JC).

**Pythagore** Pythagore (de 572 à 501 avant JC) est né sur l'île de Samos en mer d'Égée. L'île est située à proximité des côtes de l'Asie Mineure (Turquie). Durant sa jeunesse Pythagore voyagea en Orient pour y rencontrer sages, savants et chefs religieux. C'était l'époque des enseignements de Zoroastre en Perse, de Bouddha aux Indes, de Confucius et de Lao-Tzu en Chine (mais on ne pense pas que Pythagore ait rencontré ces personnages). Au terme de ses voyages Pythagore s'établit à Croton, ville grecque d'Italie, pour y fonder une secte religieuse et philosophique. Sur le plan mystique les Pythagoriciens croyaient en l'immortalité de l'âme humaine et en la possibilité de la réincarnation. Sur le plan philosophique leur doctrine peut se résumer à ceci: *la compréhension ultime des choses se trouve dans les nombres entiers*. Les Pythagoriciens attribuent une valeur mystique à certains nombres et les classent selon leurs propriétés arithmétiques ou géométriques. Ils disent qu'un entier est *parfait* s'il est égal à la somme de ses diviseurs propres. Par exemple, les nombres 6 et 28 sont parfaits car  $6 = 3 + 2 + 1$  et  $28 = 14 + 7 + 4 + 2 + 1$ . Ils disent aussi que deux entiers sont *amicaux* si chacun est la somme des diviseurs propres de l'autre. Par exemple, 220 et 284 sont amicaux car on a

$$220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$$

$$284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110.$$

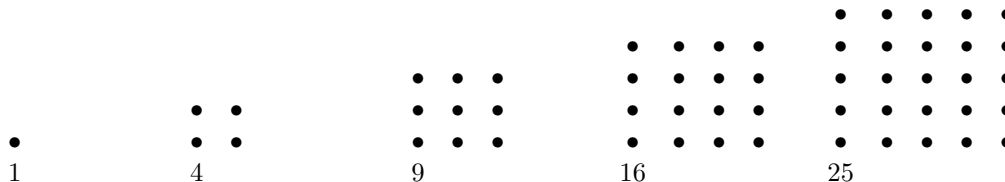
Ils introduisent les nombres *triangulaires*, *carrés*, *pentagonaux*, *hexagonaux*. Par exemple, les nombres triangulaires sont 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...



Les pythagoriciens utilisent ces représentations pour obtenir diverses relations. Par exemple, la figure suivante illustre le fait que le  $n$ -ième nombre triangulaire  $T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$  vaut

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Les nombres carrés sont 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...



La figure suivante illustre le fait que la somme de deux nombres triangulaires successifs est un carré:

$$10 + 15 = 5^2$$

La figure suivant illustre le fait que la somme des  $n$ -premiers nombres impairs est un carré:

$$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7$$

On attribue à Pythagore la découverte que  $\sqrt{2}$  est un nombre irrationnel. En réalité, les grecs ne disposaient pas du concept moderne de nombres réels, rationnels ou irrationnels. Ils avaient seulement un concept de *rappor*t entre des quantités de même nature. Deux quantités sont dites *commensurables* (co-mesurables) si elles peuvent s'exprimer comme des multiples entiers d'une même quantité; sinon elles sont dites *incommensurables*. Pythagore découvre que la diagonale d'un carré et son côté sont incommensurables.

Pythagore est l'auteur d'une théorie mathématique de l'harmonie musicale encore acceptée de nos jours. Pythagore mesurait la hauteur du son émi par une corde vibrante par la longueur de cette corde. Aujourd'hui, on sait qu'un son est causé par les vibrations de l'air frappant le tympan de l'oreille. On mesure la hauteur du son par sa fréquence, c'est à dire par le nombre de battements par seconde. Nous décrivons la théorie de Pythagore en utilisant la notion de fréquence (la fréquence d'une corde vibrante est inversement proportionnelle à sa longueur). En expérimentant sur des instruments comme la harpe, la lyre et la cithare, Pythagore découvre que les sons de fréquences  $f, 2f, 4f, 8f, \dots$  etc sont *semblables* bien que de hauteur différente. L'*octave* est l'intervalle musical séparant une fréquence  $f$  de son double  $2f$ . Par exemple, si  $f$  est un *ré* alors  $2f$  est un *ré* situé dans l'octave suivant. Pythagore découvre aussi qu'il faut mesurer l'intervalle musical séparant deux fréquences  $f$  et  $g$  par le *rappor*t  $g/f$  (et non pas par la différence  $g - f$  comme on pourrait le penser). Autrement dit, d'après Pythagore deux intervalles musicaux  $[f, g]$  et  $[u, v]$  sont *équivalents* ssi  $\frac{g}{f} = \frac{v}{u}$ . Pythagore choisit de subdiviser l'octave  $[f, 2f]$  en 12 intervalles musicaux égaux. Le choix de 12 n'est pas arbitraire car ce nombre possède un grand nombre de diviseurs. Pour subdiviser l'octave  $[f, 2f]$  en deux intervalles égaux il faut trouver une fréquence intermédiaire  $f < g < 2f$  pour laquelle

$$\frac{g}{f} = \frac{2f}{g}.$$

Ce qui donne  $g = f\sqrt{2}$ . Pour subdiviser l'octave  $[f, 2f]$  en 12 intervalles égaux il faut trouver des fréquence intermédiaires

$$f - f_0 < f_1 < f_2 < f_3 < f_4 < f_5 < f_6 < f_7 < f_8 < f_9 < f_{10} < f_{11} < f_{12} = 2f$$

de sorte que les rappor

ts

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{f_3}{f_2} = \frac{f_4}{f_3} = \frac{f_5}{f_4} = \frac{f_6}{f_5} = \frac{f_7}{f_6} = \frac{f_8}{f_7} = \frac{f_9}{f_8} = \frac{f_{10}}{f_9} = \frac{f_{11}}{f_{10}} = \frac{f_{12}}{f_{11}}$$

soient égaux. Si  $r$  est ce rappor

t commun alors on a

$$r^{12} = \frac{f_1}{f_0} \cdot \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{f_3}{f_2} \cdot \frac{f_4}{f_3} \cdot \frac{f_5}{f_4} \cdot \frac{f_6}{f_5} \cdot \frac{f_7}{f_6} \cdot \frac{f_8}{f_7} \cdot \frac{f_9}{f_8} \cdot \frac{f_{10}}{f_9} \cdot \frac{f_{11}}{f_{10}} \cdot \frac{f_{12}}{f_{11}} = \frac{f_{12}}{f_0} = \frac{2f}{f} = 2$$

Par suite,  $r = 2^{\frac{1}{12}}$ . On obtient que  $f_i = fr^i$ . Les musiciens disent que l'intervalle qui sépare  $f_i$  et  $f_{i+1}$  est un *demi-ton*. Les fréquences  $f_i$  pour  $0 \leq i \leq 12$  forment une *gamme chromatique*. Si  $f_0$  est un *do* la gamme chromatique est constituée des notes suivantes:

do, do<sup>#</sup>, ré, ré<sup>#</sup>, mi, fa, fa<sup>#</sup>, sol, sol<sup>#</sup>, la, la<sup>#</sup>, si, do.

Une troisième découverte de Pythagore concerne les *harmoniques* d'un son donné. Il découvre qu'un son de fréquence  $f$  vibre en accord avec les sons de fréquences  $2f, 3f, 4f, 5f, \dots$ . Les musiciens d'aujourd'hui disent

que  $3f$  est la *quinte* de  $f$  (mais c'est mal nommé). La fréquence  $3f$  est située dans l'octave  $[2f, 4f]$ . Comme  $2^{\frac{7}{12}} \times 2 = 2.99661 \simeq 3$ , la quinte est identifiée à la septième note qui suit  $2f$  dans l'octave  $[2f, 4f]$ , et même à la septième note qui suit  $f$  dans l'octave  $[f, 2f]$ . La quinte d'un *do* est un *sol* et la quinte d'un *mi* est un *si*.

**Euclide** (360-300 avant JC) était citoyen d'Alexandrie (ville grecque d'Égypte). On connaît peu de chose de sa vie sinon qu'il aurait écrit ses *Éléments* vers l'âge de quarante ans. Ils sont divisés en 13 volumes. C'est le premier exemple d'une théorie axiomatique. La plupart des volumes portent sur la géométrie mais les livres VII, VIII et IX portent sur l'arithmétique. On y trouve l'algorithme d'Euclide permettant de calculer le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers. On y trouve aussi la preuve de l'existence d'une infinité de nombres premiers.

**Eratosthène** aurait vécu à Alexandrie peu de temps après Euclide. Il est célèbre pour avoir été le premier à mesurer la dimension du globe terrestre. Voici comment. Il avait appris qu'un certain jour de l'année le soleil du midi était situé exactement au zénith dans la ville de Syene. Cette ville est située sur le Nil au sud. Il observa que le même jour à Alexandrie le soleil du midi était situé à  $7^{\circ}12'$  au sud du zénith. Alexandrie est située près de l'embouchure du Nil sur le bord de la Méditerranée. Eratosthène en déduisit qu'Alexandrie était située à une latitude de  $7^{\circ}12'$  au nord de Syene. La distance entre Syene et Alexandrie était connue pour être de 5000 stades. Comme  $7^{\circ}12' = 360^{\circ}/50$  Eratosthène en déduisit que la circonférence de la terre est de  $50 \times 5000$  stades = 250,000 stades. Cela équivaut à 39,688 kilomètres (la valeur réelle est de 40,000 kilomètres). Signalons le système héliocentrique fut proposé par Aristarque de Samos vers la même époque (310-230 avant JC). Le système fut malheureusement rejeté par le grand astronome grec Ptolémée (140-160 après JC). Eratosthène professa que l'on pourrait atteindre l'Inde en partant d'Espagne vers l'Ouest.

**Archimède** (287-212 avant JC) vécu surtout à Syracuse, ville grecque de Sicile. Il était contemporain et ami d'Eratosthène. On le considère comme le plus grand mathématicien de l'antiquité. Il anticipa le calcul différentiel et intégral. Dans son ouvrage sur la *Mesure du cercle* il montre que l'on a

$$3\frac{10}{71} < \pi < 33\frac{1}{7}.$$

Sa méthode consiste à comparer la circonférence d'un cercle à celle de deux polygones réguliers de 96 côtés, l'un étant inscrit et l'autre circonscrit. Il obtient ses polygones à partir d'un hexagone en doublant successivement les côtés. Dans le *Compteur de sable* Archimède se propose de calculer le nombre de grains de sable dans l'univers, à supposer que l'univers en soit rempli. Il s'adresse au roi Golon:

*"Au roi Golon, certains pensent que le nombre de grains de sable est infini; je ne parle pas seulement du sable au voisinage de Syracuse et de la Sicile mais aussi du sable que l'on peut trouver dans toutes les régions habitées ou inhabitées. Il y en a d'autres qui pensent que si ce nombre est fini il est tellement grand qu'il est impossible de nommer un nombre qui soit aussi grand. ... Je vais tenter de vous montrer au contraire que parmi les nombres que j'ai introduits dans le travail que j'ai envoyé à Zeuxippus, certains sont plus grands que le nombre de grain de sable qu'il faudrait pour remplir la terre entière et même l'univers entier..."*

Bien sûr, Archimède doit faire des hypothèses quelque peu arbitraires sur les dimensions de la terre et de l'univers. Il suppose par exemple que la circonférence de la terre mesure moins de 3,000,000 de stades. Mais son véritable but est de montrer qu'il existe un système de numération permettant de désigner des nombres d'une grandeur inimaginable. Car le système grec traditionnel ne permet pas de nommer des nombres beaucoup plus grands qu'une myriade ( $10^4$ ). Dénotons une myriade de myriades par  $M$ ; on a  $M = 10^4 \times 10^4 = 10^8$ . Archimède commence par dire que les nombres  $n \leq M$  sont du *premier ordre*. Il dit ensuite que les multiples entiers  $n \cdot M$  pour  $n \leq M$  sont les nombres du *second ordre*. Le plus grand nombre du second ordre est  $M^2$ , c'est à dire une myriade de myriades de myriades de myriades. Il appelle ensuite nombres du *troisième ordre* les multiples entiers  $n \cdot M^2$  pour  $n \leq M$ . Le plus grand nombre du second

ordre est alors  $M^3$ . Continuant ainsi, on arrive éventuellement aux nombres d'ordre  $M$  qui sont de la forme  $n \times M^{M-1}$  pour  $n \leq M$ . Le plus grand nombre de cet ordre est

$$P = M^M = 10^{8 \cdot 10^8}.$$

Mais Archimède ne s'arrête pas là. Il déclare que les nombres  $1 \leq n \leq P$  sont de première période. Il dit ensuite que les nombres  $n \cdot P$  pour  $n \leq M$  sont du premier ordre et de seconde période; le plus grand de cette catégorie est  $MP = M^{1+M}$ . Il dit ensuite que les nombres  $n \cdot MP$  pour  $n \leq M$  sont du deuxième ordre et de seconde période; le plus grand d'entre eux est  $M^2P = M^{2+M}$ . Continuant de cette manière on arrive aux nombres d'ordre  $M$  et de seconde période, le plus grand d'entre eux étant  $M^M P = P^2$ . Archimède déclare ensuite que les multiples entiers  $n \times P^2$  de  $P$  pour  $n \leq M$  sont du premier ordre et de troisième période; le plus grand de cette espèce étant  $M \cdot P^2$ . Continuant de cette manière on atteint les nombres d'ordre  $M$  et de troisième période, le plus grand de cette espèce étant  $M^M P^2 = P^3$ . Continuant ainsi on arrive aux nombres d'ordre  $M$  et de période  $M$ , le plus grand de cette espèce étant

$$P^M = (M^M)^M = M^{M^2} = (10^8)^{10^{16}} = 10^{8 \cdot 10^{16}}.$$

S'il fallait nommer le nombre  $P^M$  en disant que c'est une "myriade de myriades de myriades de myriades..." il faudrait répéter le mot myriade  $10^{16}$  fois, soit 10 millions de milliard de fois. Archimède semble avoir été le premier à reconnaître les lois exponentielles:

$$A^{m+n} = A^n A^m, \quad A^{mn} = (A^m)^n.$$

Ajoutons qu'Archimède fut le premier à calculer le volume et l'aire d'une sphère de rayon  $r$ :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad A = 4\pi r^2.$$

Il fut aussi le premier à obtenir l'aire d'un segment de parabole. Sa méthode consiste à calculer l'intégrale

$$\frac{b^3 - a^3}{3} = \int_a^b x^2 dx$$

deux mille ans avant l'invention du calcul différentiel et intégral! Archimède mourut de mort violente après la prise de la ville de Syracuse par les romains au temps de l'empereur Marcellus. Après la conquête un soldat s'introduisit dans sa villa. Il le trouva perdu dans ses réflexions, absorbé dans la contemplation d'un diagramme. Le soldat lui intima l'ordre de se rendre sur le champ auprès de Marcellus. Archimède refusa en disant qu'il devait d'abord résoudre le problème qui l'absorbait. Le soldat se mit en colère et le tua d'un coup d'épée. L'empereur Marcellus en fut très chagriné. Il fit ériger sur le tombeau d'Archimède un monument comportant un cylindre surmonté d'une sphère.

La Grèce et la Macédoine devinrent des provinces romaines en 145 avant JC. Athènes fut pillée par l'armée romaine en 86 avant JC. Après la conquête, seule Alexandrie conserva vivante l'éclat de la civilisation grecque pour quelques siècles encore. La bibliothèque d'Alexandrie, créée environ 300 ans avant JC, fut la plus grande de l'antiquité (700,000 volumes). Une partie de la bibliothèque fut incendiée en 48 avant JC lors d'une insurrection contre César. Elle fut entièrement incendiée par des chrétiens en 390 après JC. Les trésors d'information qu'elle renfermait sur le monde antique disparurent à jamais. Signalons que la première mathématicienne de l'antiquité, Hypatia, était citoyenne d'Alexandrie (370-415 après JC). Elle étudia la philosophie et les mathématiques à Athènes avant de se fixer à Alexandrie pour y fonder une école. Malheureusement, il ne reste rien de ses travaux. Elle mourut massacrée par la foule excitée contre elle par des moines chrétiens.

**Claude Ptolémée** a vécu à Alexandrie et Athènes vers le milieu du deuxième siècle après JC. Astronome et mathématicien, on lui doit l'invention de la trigonométrie. Son oeuvre principale est l'*Almageste* qui

contient une histoire de l'astronomie ancienne et un exposé complet du système géocentrique, dit *système de Ptolémée*. L'oeuvre contient aussi un traité complet de trigonométrie plane et sphérique, avec des tables donnant la longueur  $\text{cord}(\theta)$  d'une corde dans un cercle en fonction de la longueur  $\theta$  de l'arc correspondant ( $\text{cord}(\theta) = 2 \sin(\theta/2)$ ). On lui doit les formules d'addition des angles pour les fonctions trigonométriques. Il introduisit le système sexagésimal en trigonométrie, avec la division des degrés en 60 minutes et des minutes en 60 secondes. Ptolémée était aussi géographe. Il publia la meilleure atlas du monde connu à son époque. Il inventa des instruments d'astronomie comme l'astrolabe qui porte son nom. Il publie des études sur l'optique et l'acoustique.

**Diophante** a vécu à Alexandrie au troisième siècle après JC. Son oeuvre principale est l'*Arithmetica*. Elle a été publiée en 13 volumes vers 275 mais il n'en reste que 6. L'oeuvre est consacré aux équations algébriques. Les équations considérées sont toujours particulières et Diophante ne cherche que des solutions *entières ou rationnelles*. Aujourd'hui on appelle *Diophantine* une équation que l'on veut résoudre en nombres entiers ou rationnels. Par exemple, les triplets Pythagoricien  $(a, b, c)$  sont des solutions de l'équation Diophantines  $a^2 + b^2 = c^2$ . Le problème de Fermat est Diophantin car il consiste à vouloir montrer que l'équation  $a^n + b^n = c^n$  n'a pas de solutions en nombres entiers si  $n > 2$ . Diophante aborde des problèmes de nature purement arithmétique comme celui de la représentation d'un nombre entier comme la somme de deux carrés. Par exemple, on a

$$2 = 1^2 + 1^2, \quad 5 = 2^2 + 1^2, \quad 10 = 3^2 + 1^2, \quad 13 = 2^2 + 3^2, \quad 17 = 4^2 + 1^2.$$

Diophante fait l'observation suivante: "*C'est de la nature de 65 de pouvoir s'exprimer comme somme de deux carrés de deux manières différentes, 16+49 et 64+1; la raison se trouve dans la factorisation 65 = 5 · 13 car les facteurs sont eux-mêmes sommes de deux carrés*". Selon André Weil [W] cette observation montre que Diophante connaissait l'identité algébrique

$$(x^2 + y^2)(z^2 + t^2) = (xz \pm yt)^2 + (xt \mp yz)^2.$$

En effet

$$65 = 5 \cdot 13 = (2^2 + 1^2)(3^2 + 2^2) = (6 \pm 2)^2 + (4 \mp 3)^2.$$

Les observations de Diophante auront une très grande importance pour le développement ultérieur de la théorie des nombres. Mais pour cela, il faudra attendre Fermat 13 siècles plus tard.

Militariste et impérialiste, la civilisation romaine contribua peu au développement des sciences et de la philosophie. Elle réalisa toutefois des ouvrages d'ingénierie remarquables comme les aqueducs. On doit à Galien certains progrès de la médecine. La civilisation romaine contribua aussi au développement du droit. La citoyenne romaine fut l'égale du citoyen. Après la chute de l'empire romain, il faut attendre l'émergence de la civilisation musulmane pour voir les mathématiques reflourir. Les musulmans inventèrent l'algèbre sur une période qui dura environ 500 ans.

Mahomet fonda la religion de l'Islam vers 613 après avoir reçu la visite de l'archange Gabriel en 610. Il écrivit le *Coran* dans lequel il annonce la venue du jour dernier où les grand de ce monde seront impeccablement châtiés. Un "muslim" est quelqu'un qui remet son âme à Dieu (Allah). En tant que religion monothéiste, l'Islam est issu du judaïsme et du christianisme. Abraham, Moïse et Jésus y sont présentés comme des prophètes et Mahomet comme le dernier d'entre eux. Il appelle les juifs et les chrétiens à se convertir. Le Coran contient des règles pour régir la vie de la communauté des croyants, tant du point juridique et militaire que religieux. Le livre a joué un grand rôle pour répandre l'usage de la langue arabe. Le prophète Mahomet ne fut pas seulement un prêcheur religieux, mais aussi un homme politique, un législateur et un chef militaire. Après avoir conquit militairement La Mecque en 630 il étendit son autorité à toute la péninsule arabique en 631. Peu de temps après la mort du prophète, Omar (634-644), le second calife des musulmans, utilisa l'Islam comme instrument de conquête et d'unification. La Syrie, Jérusalem et Alexandrie

furent conquises en quelques années. En 643 l'empire d'Omar s'étendait jusqu'à la mer Caspienne. Mais déjà l'Islam se divisait en sectes hostiles. Une guerre civile opposa les sunnites impérialistes aux shiïtes de La Mecque qui considéraient que le calife ne devraient pas assumer le pouvoir temporel, mais se limiter au rôle d'*iman* charismatique. Mais les sunnites l'emportèrent après l'assassinat successif de deux gendres du prophète. Le gouverneur de Damas s'empara du pouvoir, rendit le califat héréditaire et fonda la dynastie de Omayyades. Il dota l'empire d'un gouvernement central installé à Damas. La dynastie des Omayyades étendit progressivement l'empire musulman de l'Indus jusqu'à l'Espagne (711) en passant par l'Afrique du Nord. Charles Martel arrêta leur progression en Gaule à Poitiers en 732. Les Omayyades ne cherchèrent pas à convertir les peuples des pays conquis mais ils imposèrent une taxe à tous les non musulmans, ce qui eu pour effet d'encourager un grand nombre à se convertir. Comme les nouveaux convertis voulurent être exemptés de la taxe des conflits apparurent au sein de l'empire. En 750 les Omayyades furent renversés et remplacés par la dynastie des Abbassides qui déplacèrent la capitale de Damas à Bagdad. Les Omayyades s'enfuirent en Espagne où ils installèrent un califat indépendant. Le calife de Bagdad se donna comme un monarque absolu de droit divin mais s'accomoda d'un régime de libéralisme économique. Au 9<sup>e</sup> siècle l'Islam possédait l'hégémonie économique dans le monde. La monnaie internationale fut celle de Bagdad.

**Mohammed Al-Khwarizmi** est le plus premier mathématicien du temps de l'empire musulman. Il aurait vécu à Bagdad au temps du calife al-Mâmûm. Il serait mort vers 840. Il est l'auteur de tables d'astronomie et de plusieurs traités de mathématiques. Il a écrit le premier traité d'algèbre proprement dit. Le titre de l'ouvrage était "*Précis sur le calcul al-jabr et al-muqabala*". L'opération *al-jabr* (=algèbre) consiste à déplacer dans une équation un terme à soustraire d'un membre vers l'autre (en changeant de signe). Par cette opération, l'équation

$$x^3 + 3x - 10 = 2x$$

devient

$$x^3 + 3x = 2x + 10.$$

L'opération *al-muqabala* consiste à soustraire une quantité de chaque membre. Par cette opération, la dernière équation devient

$$x^3 + x = 10.$$

Le traité d'algèbre contient une série de problèmes concernant la répartition des héritage. Le Coran fixe d'avance les proportions que chaque parent doit recevoir et cela peu engendrer des problèmes compliqués dépendant des relations de parenté. Al-Khowârizmi écrivit aussi un traité sur l'arithmétique qui utilise la numération décimale. Le traité fut traduit plus tard en latin par Adelard de Bath (1120) et Robert de Chester (1130) sous le titre "*Algoritmi de numero Indorum*", c'est-à-dire "Algorithme des nombres indiens". Algorithme=Al-Khwarizmi.

**Omar Khayyam**(1048-1131) est un savant et poète persan. Astronôme, il fut chargé d'une réforme du calendrier. Il rédigea un traité d'algèbre, le meilleur de son époque. L'ouvrage contenait une classification des équations du second et du troisième degré. Pour résoudre l'équation  $x^2 + px = q$  il écrit qu'il faut successivement "*multiplier la moitié de p par lui-même; additionner q; prendre la racine carré de la somme; et finalement soustraire la moitié de p*". C'est à dire:

$$x = \sqrt{(p/2)^2 + q} - p/2.$$

Il donne une construction géométrique de la solution d'une équation cubique  $x^3 + ax = b$ . Il commence par la mettre sous la forme  $x^3 + p^2x = p^2q$ . Il construit la solution en prenant l'intersection de la parabole  $x^2 = py$  avec le cercle  $x^2 + y^2 = qx$ .

**Al-Samaw'al**(vers 1170) Poursuit les travaux d'Al-Karagi. Introduit les fractions décimales. Un polynôme est représenté par le tableau de ses coefficients. En fait il manipule des expressions pouvant comporter des puissances négatives de l'inconnue (on dit aujourd'hui que ce sont des polynômes de Laurent):

$$\sum_{k=-m}^n a_k x^k = a_{-m} x^{-m} + \dots + a_{-1} x^{-1} + a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n.$$

Il expose des règles pour manipuler des quantités négatives comme

$$\begin{aligned} -(-ax^n) &= ax^n \\ -ax^n - bx^n &= -(a+b)x^n \end{aligned}$$

Il décrit une méthode permettant d'approximer numériquement la solution d'une équation  $x^n = Q$ . Sa conception des approximations démontre une familiarité avec le concept de nombres réels. Il dit ... *c'est pourquoi il devient possible de retrouver continûment une quantité rationnelle proche de la quantité irrationnelle et de retrouver une autre quantité rationnelle plus proche que la première de l'irrationnelle, et indéfiniment...*  $\square$

Au 12<sup>e</sup> siècle des européens voyageant en Espagne rapportent des ouvrages arabes et commencent à les traduire en latin. Les *Éléments* d'Euclide et des pans entiers de l'oeuvre d'Aristote et de Platon, parvinrent à l'Europe traduit de l'arabe plutôt que du latin. L'Espagne devint la porte d'entrée en Europe de la culture musulmane et de la culture hellénistique qu'elle véhicule. Ce flux culturel permit à l'Europe de sortir progressivement des perspectives bornées du Moyen Age. C'est le début de la *Renaissance*, vaste mouvement culturel qui fera renaître les valeurs de l'antiquité au sein de la civilisation européenne. En 1275 Marco Polo entreprend un long voyage qui le mènera jusqu'en Chine. À son retour il écrit le *Livre des merveilles du monde*. Entre 1200 et 1500 plus de 80 universités furent créés à travers l'Europe.

**Fibonacci.** L'un des grands mathématiciens du 13<sup>e</sup> siècle est Léonard de Pise connu sous le nom de Fibonacci. Il écrivit "*Liber Abaci*", le "Le Livre du Calcul", dans lequel il explique le système de numération arabe ainsi que les bases de l'algèbre. Fibonacci introduisit une suite des nombres  $F_0, F_1, F_2, \dots$  qui porte son nom:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Par définition, on a  $F_0 = 1$ ,  $F_1 = 1$  et  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  pour  $n > 1$ . Ces nombres ont des propriétés remarquables; ils font toujours l'objet de nombreuses recherches.

**Tartaglia et Cardan.** Au 16<sup>e</sup> siècle plusieurs mathématiciens italiens s'efforcent de résoudre des équations du troisième degré. La solution aurait été découverte indépendamment par Scipione del Ferro (1456-1526) et Niccolo Tartaglia (1500-1557). Les découvreurs n'ont pas publié leur solution. Mais Tartaglia confie cette solution à Jérôme Cardan, un compatriote médecin et mathématicien. Celui-ci la publie dans son *Ars Magna* en 1545. On dit aujourd'hui que la solution de l'équation  $x^3 + bx = c$  est donnée par la *formule de Cardan*:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{D} + \frac{c}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{D} - \frac{c}{2}}$$

où l'on a posé  $D = \frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}$ . Les quantités  $b$  et  $c$  peuvent prendre des valeurs négatives. Toutefois, lorsque  $D < 0$  la formule de Cardan présente un problème sérieux car il faudrait prendre la racine carrée d'un nombre négatif. Cardan dit que c'est le cas *irréductible*. Cardan tente de poursuivre le calcul avec des nombres qu'il qualifie d'*absurdes*. Cardan échoue à résoudre l'équations du quatrième degré, mais il pose le problème à son étudiant Ferrari qui trouve la solution malgré son jeune âge.

**Bombelli.** (1526-1572) Il poursuit les travaux de Cardan en les systématisant. Il publie une "*Algèbre*" qui donne les règles de multiplication des nombres complexes:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Il observe que l'on a  $(2 \pm i)^3 = 2 \pm 11 \cdot i$ , ce qui lui permet d'obtenir la solution de l'équation  $x^3 = 15x + 4$  (un cas qualifié d'irréductible) en utilisant la formule de Cardan:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{2 + 11 \cdot i} + \sqrt[3]{2 - 11 \cdot i} \\ &= (2 + i) + (2 - i) = 4. \end{aligned}$$

**François Viète** (1540-1603) fit plusieurs contributions à l'algèbre et à la trigonométrie. Il est le premier à donner une formule permettant de calculer exactement le nombre  $\pi$ :

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \times \dots$$

Il est auteur d'un traité d'algèbre célèbre "*Isagoge in Artem Analyticam*". Ses notations algébriques sont proches des notations modernes. Par exemple, il écrit

$$1QC - 15QQ + 85C - 225Q + 274N \text{ aequatur } 120$$

pour l'équation  $x^6 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$ . Pour Viète une différence  $a - b$  n'a de sens que si  $a \geq b$ . Il exclua les nombres négatifs de son traité bien que ces nombres aient été d'usage assez répandu à son époque. Viète fait une description ingénieuse de la solution de l'équation du troisième degré

$$y^3 + 3by = 2c.$$

On supposant que  $z^3 + yz = b$  il obtient que  $z^6 + 2cz^3 = b^2$ . Cette dernière équation est du second degré en  $z^3$  car  $z^6 = (z^3)^2$ . On peut donc calculer  $z^3$ , ensuite  $z$  et finalement  $y$ .

Au 16<sup>e</sup> siècle un penseur comme Montaigne (1533-1592) explore l'idée que "chaque homme porte la forme entière de l'humaine condition". Au 17<sup>e</sup> siècle un penseur comme Hobbes (1588-1679) soutient qu'il est de la nature de l'homme de vouloir satisfaire ses désirs; il écrit que "La félicité est une continuelle marche en avant du désir, d'un objet à un autre, la saisie du premier n'étant encore que la route qui mène au second". Il dit que dans l'état naturel, la compétition entre les hommes dans la poursuite de la satisfaction et du pouvoir engendre la violence. D'après lui "L'homme est un loup pour l'homme". Il dit aussi que l'homme invente des lois qu'il s'impose et impose à ses semblables pour échapper à l'état de guerre et de destruction propre à l'état de nature. A partir du 17<sup>e</sup> siècle les progrès de la science s'accélérent et l'industrie se développe à grands pas. La bourgeoisie s'agrandit et les régimes féodaux s'affaiblissent. L'Angleterre du 17<sup>e</sup> siècle est déchiré par les guerres civiles et religieuses. Le parlement (constitué surtout de nobles) limite le pouvoir royal. Cromwell fait décapiter le roi en 1649; il impose une dictature sous le couvert du parlement mais la monarchie est restaurée en 1660.

**René Descartes** (1596-1650) est à la fois philosophe et mathématicien. Il dit vouloir libérer l'homme des préjugés de l'enfance et de la religion. Dans son *Discours de la méthode* il tente de fonder la connaissance humaine sur la raison et quelques évidences premières. Il part de l'affirmation "*cogito ergo sum*" (je pense donc je suis) pour en déduire l'existence du monde et de Dieu. Il en déduit aussi la loi de conservation du mouvement en s'appuyant sur la principe que rien ne peut détruire ce que Dieu a créé. Sa philosophie est matérialiste malgré ses spéculations théologiques. Il admet l'existence de l'âme humaine mais conçoit le corps comme une machine. En géométrie on lui doit l'introduction des *coordonnées*. Dans sa *Géométrie* il montre comment un système de coordonnées permet de transformer un problème d'algèbre en un problème de géométrie et vice versa. Il montre que les coniques sont décrites par des équations du second degré en deux variables. Les notations algébrique de Descartes sont presque modernes. Ainsi, pour l'équation  $y = ax^3 + bx^2 + cx$  il écrit

$$y \propto ax^3 + bx^2 + cx$$

Curieusement, Descartes se méfie des nombres négatifs. Il qualifie de *fausses* les racines négatives d'un polynôme. Il ne considère que les points du plan dont les coordonnées sont positives, ce qui revient à ne considérer qu'un seul quadrant. Descartes s'intéresse aussi à l'optique. Il formule la *loi de réfraction* qui porte son nom.

**Remarque 1:** Le symbole moderne d'égalité "=" a été introduit par Robert Recorde dans son livre d'algèbre *Whetstone of wytte* (1551). Recorde explique son choix en disant que *rien n'est plus égaux que deux traits parallèles*. Il a fallu un certain temps pour que la notation soit universellement adoptée.

**Remarque 2:** C'est Newton qui ajoutera des coordonnées négatives au système de Descartes. Les axes d'un système de coordonnées diviseront dès lors le plan en quatre quadrants. Cela fait perdre aux nombres négatifs leur mystère. Newton classe les courbes cubiques.

**Remarque 3:** Plusieurs mathématiciens ont contribué au développement de l'interprétation géométrique des nombres complexes. Le premier est Wallis (1616-1703) dans son *De Algebra Tractatus* publié en 1685, mais ses idées sont restées peu connues. Le second est Wessel (1745-1818) dans un papier publié dans les Transactions de l'Académie Danoise en 1798 mais resté ignoré jusqu'à ce qu'il soit traduit en français en 1897. Le troisième est Argand (1768-1822) dans un "Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques". Il découvre que la multiplication par  $i$  est une rotation de  $90^\circ$  autour de l'origine. On dit parfois que le plan complexe est le *plan argésien*.

**Blaise Pascal** (1623-1662) est mathématicien, philosophe et théologien. Il fait des contributions importantes à la géométrie, à l'algèbre et au calcul des probabilités. Il invente la première machine à calculer. Il montre que les coefficients du binôme

$$(x + y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{1}xy^{n-1} + y^n$$

figurent dans le *triangle de Pascal*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\ & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & \dots & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \end{array}$$

qu'il engendre en utilisant la relation  $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ . Il montre que l'on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Pascal est l'un des premiers à faire usage de raisonnements par récurrence.

**Pierre de Fermat** (1601-1665) était magistrat à Toulouse. Amateur de mathématiques, principalement de théorie des nombres, il étudia une traduction latine du texte grec de Diophante qu'avait publié Bachet de Méziriac en 1612. Il s'intéresse alors aux nombres premiers. Il démontre qu'un nombre premier de la forme  $4n + 1$  est une somme de deux carrés. Il démontre que si un nombre premier  $p$  ne divise pas un entier  $a$  alors il divise l'entier  $a^{p-1} - 1$ . On dit aujourd'hui que ce résultat est le "petit théorème de Fermat". Les mathématiciens du temps de Fermat aimaient se lancer des défis. Fermat propose de montrer que si un entier  $A > 0$  n'est pas un carré parfait alors l'équation (dite de *Pell-Fermat*)

$$x^2 - Ay^2 = 1$$

possède une solution en nombres entiers  $x, y > 0$ . Par exemple, si  $A = 61$  la plus petite solution est donnée par  $x = 1766319049$  et  $y = 226153980$ . Wallis et Brouncker trouvent un algorithme permettant de calculer une solution mais la preuve de sa validité ne sera démontrée que plus tard par Lagrange. Fermat est célèbre pour avoir énoncé le "grand théorème de Fermat" qui dit que l'équation

$$x^n + y^n = z^n$$

n'a pas de solutions en nombres entiers  $x, y, z > 0$  lorsque  $n > 2$ . L'énoncé se trouve dans une marge d'un exemplaire de l'Arithmétique de Diophante trouvé après la mort de Fermat mais la démonstration de Fermat n'a pas été retrouvée. Le résultat a été démontré récemment (en 1994) par Andrew Wiles. Les contributions scientifiques de Fermat ne se limitent pas aux mathématiques. En optique il énonce le *principe de Fermat* qui dit que la lumière emprunte toujours le chemin de durée minimale (plus exactement de durée extrême) pour aller d'un point à un autre dans un milieu transparent. Le principe permet de lier l'indice de réfraction d'un liquide à la vitesse de propagation de la lumière dans ce liquide. Fermat en déduit la loi de réfraction de Descartes.

Au 17<sup>e</sup> siècle un penseur comme Montesquieu (1689-1711) développe une théorie du droit naturel et des lois dans une république démocratique. Il dit que la liberté ne consiste pas à "faire ce que l'on veut" mais à "faire ce que les lois permettent". Il dit qu'il faut empêcher l'abus de pouvoir du gouvernement "Pour former un gouvernement modéré, il faut combiner les puissances, les régler, les tempérer, les faire agir; donner pour ainsi dire, un lest à l'une, pour la mettre en état de résister à une autre". Des penseurs comme Hume (1711-1776) et Rousseau (1712-1778) réfléchissent sur l'homme, la nature et la société. Rousseau note que "L'amour de soi, qui ne regarde que nous, est content quand nos vrais besoins sont satisfaits; mais l'amour-propre, qui se compare, n'est jamais content et ne saurait l'être, parce que ce sentiment, en nous préférant aux autres, exige que les autres nous préfèrent à eux; ce qui est impossible". Rousseau cherche à comprendre l'origine de l'inégalité sociale: "Le premier qui, ayant enclos un terrain, s'avisait de dire: *Ceci est à moi*, et trouva des gens assez simples pour le croire, fut le vrai fondateur de la société civile". Il se méfite de l'État car "l'esprit universel des lois de tous les pays est de toujours favoriser le plus fort contre le faible..." Il élabore une théorie du *contrat social* par lequel chaque citoyen aliène volontairement une partie de sa liberté pour la bonne marche de la communauté.

**Léonard Euler** (1707-1783) est l'un des mathématiciens les plus prolifiques de tous les temps. On lui doit les notations modernes pour les nombres  $\pi$  et  $e$ . Euler est un calculateur audacieux. Il substitue des nombres complexes dans le développement en séries des fonctions usuelles. C'est ainsi qu'il découvre la *formule d'Euler*

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Il obtient en particulier la "plus belle formule des mathématiques":  $e^{i\pi} + 1 = 0$ . Les raisonnements d'Euler ne sont pas toujours rigoureux mais ses résultats sont presque toujours exacts. Lagrange dira plus tard: *Lisez Euler, c'est notre maître à tous!* Les contributions d'Euler ne se limitent pas aux mathématiques. Il fonde le calcul des variations qui devint la base de l'optique et de la mécanique. Il obtient les équations qui régissent le mouvement d'une toupie. Il développe une théorie du mouvement des planètes et des comètes. Il fut l'un des premiers à défendre les idées de Huygens sur la nature ondulatoire de la lumière. Il découvrit plusieurs équations de la mécanique des fluides.

Au 18<sup>e</sup> siècle les colons anglais qui peuplèrent l'Amérique le firent surtout pour fuir les persécutions religieuses ou politiques dont ils étaient l'objet en Angleterre. Des désaccords concernant les taxes aboutirent en 1774 au boycottage des marchandises imposées par la métropole. La répression anglaise provoqua la guerre d'indépendance en 1775. L'Angleterre capitula en 1781. La *Déclaration de l'Indépendance* marque le début de la démocratie américaine. Le texte rédigé par Thomas Jefferson et Benjamin Franklin dit que *les gouvernements existent pour le bonheur des peuples et qu'ils tirent leur pouvoir de leur assentiment*. Il proclame l'égalité et la liberté de tous les hommes. Il instaure un libre échange absolue entre les États de l'Union. Mais l'esclavage reste en vigueur dans les États du Sud car revendiqué comme nécessaire par ces États. Il faudra attendre Abraham Lincoln pour que l'esclavage soit complètement aboli après la Guerre de Sécession en 1864.

**Adrien Marie Legendre** (1752-1833) a fait des contributions fondamentales à la théorie des nombres et à la théorie des fonctions. Dans son traité *Théorie des Nombres* il donne une condition nécessaire et suffisante

pour qu'une équation quadratique

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

à coefficients rationnels  $(a, b, c)$  possède une solution rationnelle  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ . Il introduit le *symbole de Legendre*

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \pm 1$$

dont la valeur gouverne l'existence d'une solution à la congruence  $x^2 \equiv a$  modulo  $p$  pour un nombre premier  $p$ . Il conjecture la *loi de réciprocité quadratique*

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

qui aura des répercussions considérables sur la théorie des nombres.

**Carl Frederic Gauss** (1777-1855) est l'un des plus grands mathématiciens de tout les temps. Il apporta des contributions fondamentales à l'algèbre, à la théorie des nombres, à la théorie des fonctions, à la géométrie, à la physique et à l'astronomie. On lui doit l'expression "*nombres complexes*" pour désigner les "*nombres imaginaires*". Dans sa thèse de doctorat de 1799 il démontre la théorème fondamental de l'algèbre : *tout polynôme à coefficients complexes de degré  $> 0$  possède au moins une racine complexe*. Dans ses *Recherches Arithmétiques* il résout un grand nombre des problèmes de théorie des nombres posés par ses prédécesseurs dont Fermat, Euler, Langrange et Legendre. Il y introduit la notion de *congruence* modulo un entier  $n$ . Il développe l'arithmétique des *entiers de Gauss* (ce sont les nombres complexes  $a + bi$  où  $a$  et  $b$  sont entiers). Il généralise les résultats de Fermat sur la représentation d'un entier  $n$  comme somme de deux carrés  $n = x^2 + y^2$  à celui d'une représentation par une forme quadratique binaire:

$$n = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

Ses résultats auront des répercussions profondes sur la théorie des nombres. Gauss étudia les figures géométriques que l'on peut construire en utilisant uniquement une règle et un compas. La géométrie d'Euclide n'utilise que ces instruments pour ses constructions géométriques. Il est facile de construire avec ces instruments des figures comme le carré ou l'hexagone régulier. Une construction du pentagone régulier se trouve dans les *Éléments* d'Euclide. On peut facilement diviser un angle en deux avec une règle et un compas. Cette opération de division permet de doubler le nombre de côtés d'un polygone régulier déjà construit. Ce qui permet de construire les polygones réguliers de 8, 10 et 12 côtés. Toutefois, les géomètres n'arrivaient pas à construire les polygones réguliers de 7 et 9 côtés.

**Théorème.** (Gauss). *Un polygone régulier de  $n$  côtés est constructible par règle et compas ssi on a*

$$n = 2^r p_1 \cdots p_k$$

où  $p_1 \dots p_k$  sont des nombres premiers de Fermat distincts.

Le théorème montre que les polygones réguliers de 7 et de 9 côtés ne sont pas constructibles, alors que le polygone régulier de 17 côtés est constructible. Gauss conjectura que le nombre  $\pi(N)$  de nombres premiers  $\leq N$  est asymptotiquement donné par

$$\pi(N) \sim \int_2^N \frac{dx}{\log x}.$$

Gauss fit une contribution importante à la théorie des probabilités en introduisant la *distribution normale*

$$1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Il fut le premier à étudier la géométrie des surfaces générales. Il introduisit le concept de courbure. Il vit que la géométrie non-euclidienne est identique à celle d'une surface de courbure négative constante. Les

contributions de Gauss ne se limitent pas aux mathématiques. Il calcula l'orbite de l'astéroïde Cères ce qui permit d'en prédire l'observation. Il contribua au développement d'une théorie de l'électro-magnétisme. En 1833 il inventa le télégraphe électrique qu'il expérimenta avec son ami Wilhelm Weber.

Aux 18<sup>o</sup> et 19<sup>o</sup> siècles, l'indépendance des États-Unies provoque une recrudescence du courant de libéralisme en Europe. En Suisse un soulèvement populaire éclate à Genève (1783). En Irlande se forme un parti pour l'indépendance. En Hollande des "patriotes" s'opposent à Guillaume V. La France connaitra la révolution sanglante suivit d'une dictature par Napoléon. Elle sera le deuxième pays occidental à se doter d'un régime démocratique mais son installation connaitra des soubresauts qui s'étaleront sur près d'un siècle. La démocratisation de l'Europe au 19<sup>o</sup> siècle ne se fit pas sans heurts. On assista au développement de nouvelles formes d'impérialisme et à l'extension maximale du colonialisme. Le soleil ne se coucha plus sur l'empire britannique tellement il était devenu vaste. Des voies ferrées traversèrent des continents entiers. La production industrielle atteignit des nouveaux sommets avec l'usage systématique des machines à vapeur. Le capitalisme basé sur l'exploitation des masses ouvrières prospéra, particulièrement en Angleterre. Ces développements inspirèrent Karl Marx (1818-1883) dans sa critique radicale du capitalisme. Vers la même époque Charles Darwin (1809-1882) proposa sa théorie de l'évolution des espèces. L'homme descendait du singe. Cette théorie fut violemment combattue dans tous les milieux conservateurs et religieux, indépendamment de tout motif scientifique. Elle est encore contestée par certains groupes religieux américains qui s'opposent à ce qu'elle soit enseignée dans les écoles. Vers la même époque James Clerk Maxwell (1831-1879) formula les lois générales de l'électromagnétisme. Ces lois ont la forme de quatre équations différentielles particulièrement élégantes. Des calculs formels (algébriques!) basés sur ces équations permirent à Maxwell de prédire l'existence d'ondes électromagnétiques se propageant dans le vide et d'en calculer la vitesse. Comme cette vitesse s'avérait identique à celle de la lumière (mesurée pour la première fois par Fizeau en 1849) il en tira la conclusion que la lumière était elle-même une onde électromagnétique. La découverte de Maxwell fut le point de départ d'une véritable révolution scientifique. Le physicien Heinrich Hertz (1857-1894) confirma expérimentalement les découvertes de Maxwell en 1888. Ces découvertes permirent plus tard à Marconi d'inventer la télégraphie sans fil. La première liaison transatlantique, de Terre-Neuve à l'Angleterre, se fit en 1901.