Problèmes du jour 0

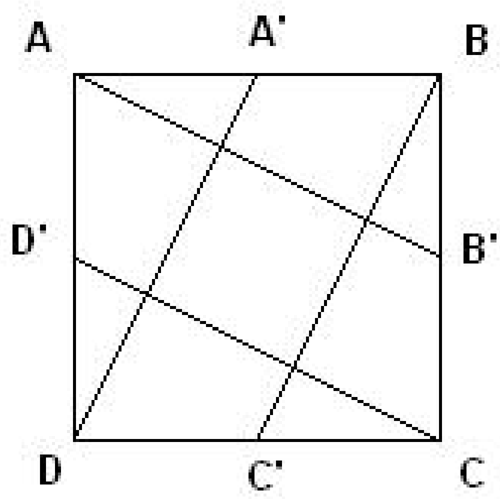
19 juin 2005

Notez que vous recevrez des points boni si vous généralisez les résultats des problèmes 1 ou 2.

1. a) Calculez $n^3 - n$ pour $n = 1, 2, 3, 4$ et 5. Qu'est-ce que ces nombres ont en commun? Est-ce que ce résultat tient pour n'importe quelle valeur (entière) de n?
   b) Prouvez un résultat semblable pour $n^5 - n$.

2. La fonction zêta de Riemann est définie ainsi:
   $\zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ pour $s > 1$
   Il existe un lien intéressant entre cette fonction et les nombres premiers qu'on explorera plus tard...
   Au 18^e siècle, Euler a prouvé que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ (en fait, il a prouvé un résultat plus général que vous allez voir durant le camp).
   La fonction êta de Dirichlet est définie ainsi:
   $\eta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$ pour $s > 0$
   a) Trouvez la valeur exacte de $\eta(2)$.
   b) Faites de même pour $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

3. Dans la figure suivante, ABCD est un carré. A', B', C' et D' sont a mi chemin entre les sommets. Trouvez l'aire du carré au centre.



4. Trois insectes (A, B et C) habitent sur un plan cartésien. Au début, A se trouve à (0,0), B à (1,0) et C à (0,1). Ensuite, les insectes commencent à se déplacer un à la fois suivant la règle suivante : l'insecte A peut seulement se déplacer dans une direction parallèle à la droite BC, et de même pour B et C.
a) Décrivez la séquence de déplacements qui entraîne le renversement des positions de A et de B, ou prouvez que c'est impossible.
b) La configuration A(2,2), B(3,4) et C(4,1) est-elle possible?