

Problèmes du jour 1

21 juin 2005

1. a) Combien de façons y a-t'il de mettre 6 balles numérotées dans 3 boîtes?
b) ABCD est un trapèze isocèle avec côtés mesurant 1,1,1 et 2 unités. Découpez le en quatre polygones congruents.
c) Quel nombre est plus grand: 2^{192} ou 3^{128} ? (sans calculatrice!)
2. a) Pour un nombre complexe z , $N(z) = z\bar{z}$ (la norme de z).
 - 1) Prouvez que la norme est multiplicative, c'est à dire, $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$
 - 2) Soit S_n l'ensemble des entiers que l'on peut exprimer comme somme de n carrés. Si $a, b \in S_2$, prouvez que $ab \in S_2$.
 - 3) Prouvez que $S_2 \neq Z^+$ (l'ensemble des entiers positifs). Prouvez qu'il y a même un infinié de nombres dans $Z^+ - S_2$.b) 1) En utilisant les quaternions au lieu des nombres complexes, prouvez que si $a, b \in S_4$, prouvez que $ab \in S_4$.
2) Un théorème célèbre de Lagrange dit que $S_4 = Z^+$. Prouvez que $S_3 \neq Z^+$ en donnant 3 exemples d'entiers pas dans S_3 .
3. Un n -gone régulier est inscrit dans un cercle de rayon 1. Je choisis un sommet, et je considère la distance entre ce sommet et chaque autre sommet. Prouvez que le produit de ces distances donne n .
4. Trouvez la valeur exacte de la double série: $S = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(2^n + 2^m)}$